

FIGURE ISOPERIMETRICHE HANNO LA STESSA AREA?

Si è partiti da qui:

“Due contadini si incontrano in un negozio di ferramenta: devono acquistare entrambi 40 m. di rete metallica necessaria a recintare i loro orti rettangolari.

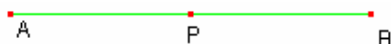
-‘*Che strano*’, dice il primo, ‘*la stessa lunghezza di rete da cinta quando il mio orto ha una superficie ben più grande del tuo!*’

-‘*Ma non dir sciocchezze*’ ribatte il secondo, ‘*se prendiamo entrambi 40 m di rete significa che i nostri due orti hanno la stessa area!*’

Chi dei due ha ragione?

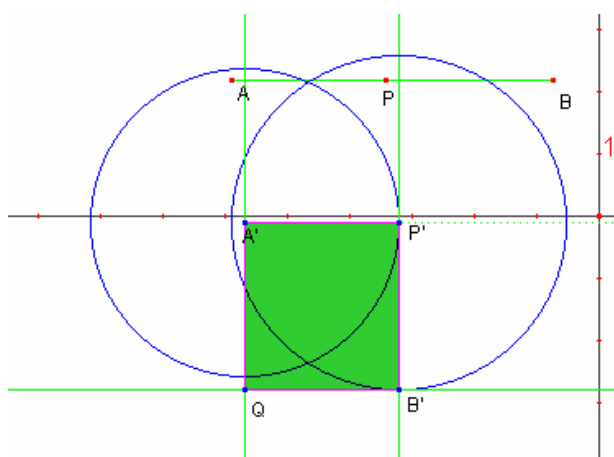
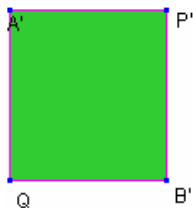
Posti di fronte a tale problema si è proceduto nella risoluzione, utilizzando un opportuno ambiente di geometria dinamica, avendo così la possibilità di affiancare al **registro numerico** (tabelle), **grafico** (grafico per punti) e **formale** (la formula che rappresenta la variazione dell'area in funzione del lato) anche un **registro geometrico visivo** (la variazione dei rettangoli in un ambiente di geometria dinamica), questo lavorando prevalentemente sul programma “Cabri II plus” :

Si è costruito un segmento AB e preso un punto P su di esso (col comando Distanza/Lunghezza si sono evidenziate le misure di AB, AP e PB)



AB = 5,16 cm
AP = 2,47 cm
PB = 2,68 cm
Risultato: 6,64 cm²

Si è, in seguito, costruito un rettangolo A'P'B'Q avente un lato lungo quanto AP e l'altro lungo quanto PB, seguendo tale procedimento:



- costruire una semiretta di origine A'
- con Compasso riportare la lunghezza del segmento AP sulla semiretta; indicare con P' il secondo estremo
- costruire per P' una retta perpendicolare ad A'P'
- con Compasso riportare sulla retta appena costruita un segmento P'B' di lunghezza equivalente a PB
- per B' tracciare una retta parallela a A'P'
- per A' tracciare una retta parallela a P'B', chiamare Q l'intersezione delle due ultime rette
- con il comando Quadrilatero, costruire il rettangolo A'P'B'Q
- riempire il rettangolo con un colore
- con Mostra/nascondi nascondere le costruzioni che hanno condotto al rettangolo

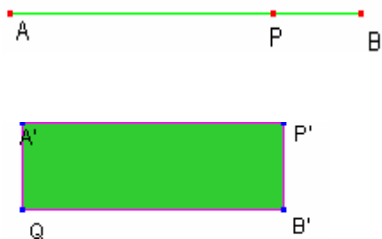
Col comando Calcolatrice si è calcolata l'area del poligono ottenuto, secondo la formula:

$$A = b * h = A'P' * P'B' = 2,47 * 2,68 = 6,64 \text{ (cifre approssimate)}$$

Si è, quindi, provato a muovere il punto P lungo il segmento AB.

In conseguenza, anche la figura del rettangolo si modifica, insieme ai lati di AP, PB e area (nonché al valore numerico).

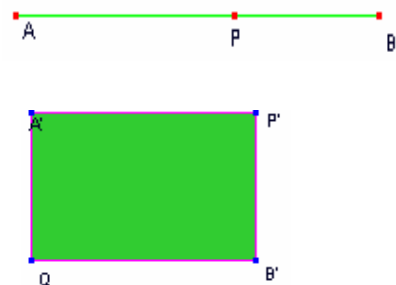
I poligoni ottenuti facendo scorrere P sono tutti rettangoli isoperimetrici; AB (il semiperimetro: $AB = p = 5,16$ cm) rimane, invece, sempre invariato.



5,16 cm
3,87 cm
1,29 cm
Risultato: 4,99 cm²

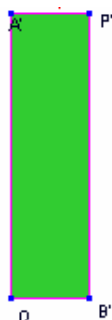
Si è notato, così, che in corrispondenza, il rettangolo mostra una variazione di misura delle due dimensioni: all'aumentare della base, l'altezza diminuisce, e viceversa.

Le due sono, quindi, inversamente proporzionali, e in relazione, anche l'area cambia.



5,16 cm
3,11 cm
2,05 cm
Risultato: 6,37 cm²

Il segmento AB ha misura costante uguale al semiperimetro del rettangolo (p); rappresenta, quindi, la misura di $A'P' + P'B'$ (così posto raffigura un triangolo) del poligono regolare in questione.



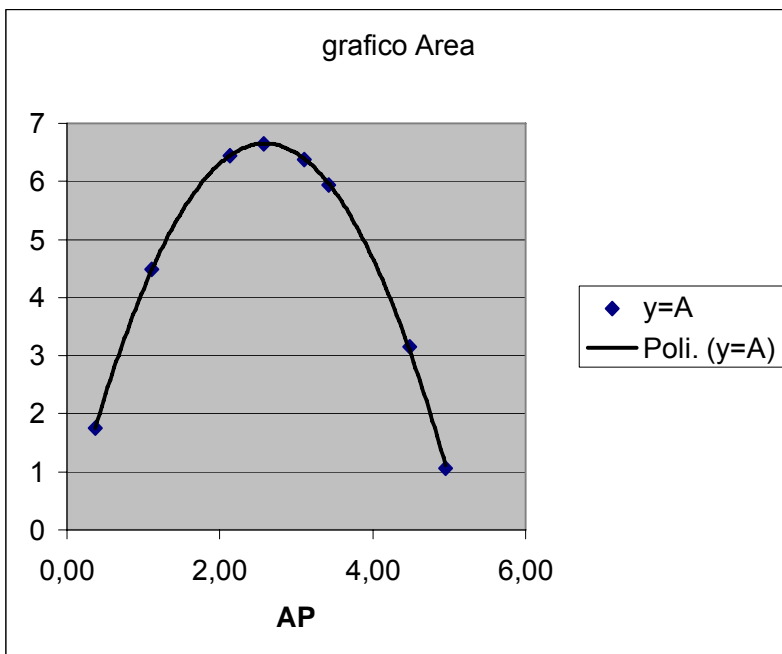
5,16 cm
1,11 cm
4,05 cm
Risultato: 4,48 cm²



Successivamente, si è presa una serie di misure di AP e PB a seconda della posizione del punto P sul segmento. Col comando Calcolatrice sono state calcolate le aree corrispondenti. In tal modo, utilizzando il programma Microsoft Excel, si sono creati una tabella e un grafico a dispersione su di un piano cartesiano determinato dai valori di questa.

Si sono riportate sull'asse x le misure di AP e sull'asse y le misure dell'area relativa, ottenendo, così, una parabola con concavità rivolta verso il basso.

x= AP	y= A
0,37	1,76
1,11	4,48
2,13	6,45
2,58	6,65
3,11	6,37
3,42	5,94
4,49	3,16
4,95	1,06



Si è notato che facendo variare la x (AP), l'area cambiava in infiniti casi, secondo un'equazione di secondo grado (della parabola).

Infatti:

$$\text{Area} = b \cdot h = AP \cdot PB \quad PB = p - AB = p - x$$

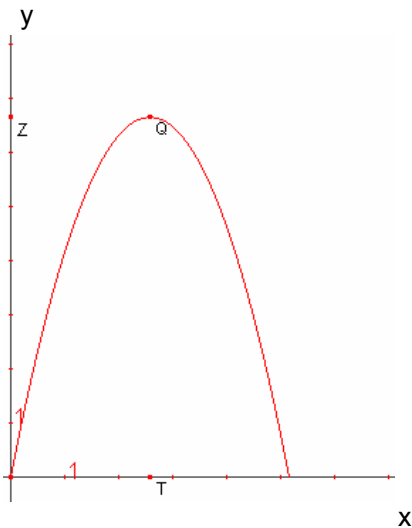
ponendo AP, il lato "orizzontale" del rettangolo, come variabile x, PB è la differenza tra il semiperimetro e x :

Area = y → variabile dipendente (varia in funzione di x)

AP = base = x → variabile indipendente

$$p = AB = (p - x) \rightarrow A = x (p - x) = px - x^2 = -x^2 + px$$

$$y = -x^2 + px$$



Si è poi ripresa la costruzione in Cabri, attraverso cui è stato disegnato il grafico di Area al variare della misura di x (AP): l'area di questi rettangoli è $x(p - x)$, dove p è il semiperimetro. Quindi i punti rappresentati nel riferimento cartesiano soddisfano, come sopraddetto, l'equazione $y = -x^2 + px$ che è l'equazione di una parabola che piange, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, la cui x corrisponde alla misura del segmento AP e y alla misura dell'area.

$$\text{c.e. } 0 < x < p \rightarrow 0 < AP < AB$$

$$\text{Area} = x(p - x) = -x^2 + px$$

$$\text{L'area cambia in funzione di AP (base)} \rightarrow \text{Area} = f(\text{AP})$$

Per ricavare l'equazione del vertice si è applicata la seguente formula :

$$V(-b/2a; -\Delta/4a) \rightarrow a = -1 \quad b = \text{valore di AB} \quad c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5,16^2 + 4 = 26,62 + 4 = \sqrt{30,62} = 5,5$$

$$V(-5,16/-2; -\sqrt{30,62}/-4) = (2,58; 1,37)$$

Il punto di ordinata massima del grafico è il punto Q, il vertice della parabola; contemporaneamente, i segmenti AP e PB sono congruenti. Il valore massimo per l'area si ottiene, appunto, nel vertice della parabola, quindi, il lato che massimizza il suo valore (ossia quello per cui si ottiene area massima) è dato dall'ascissa del vertice:

$$X_v = -b/2a = -[p/2(-1)] = p/2$$

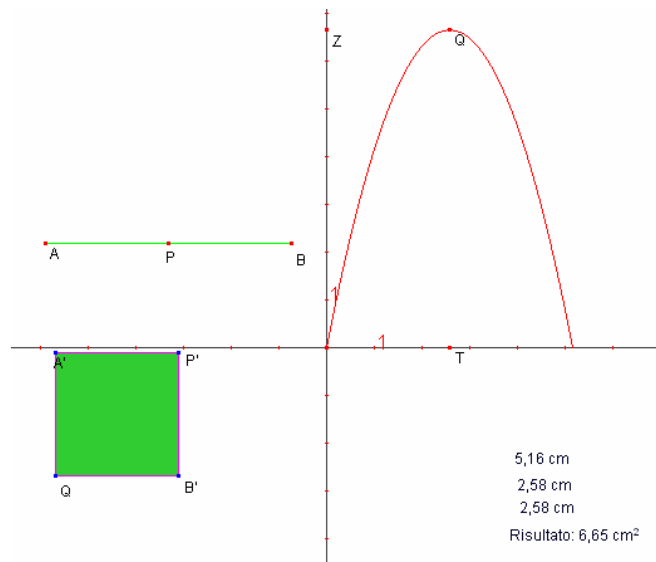
$$\text{Se } 2p = 5,16 \rightarrow \text{tale lato misura } 1,29$$

$$\text{e a tale lato corrisponde un'area pari a } p^2/2$$

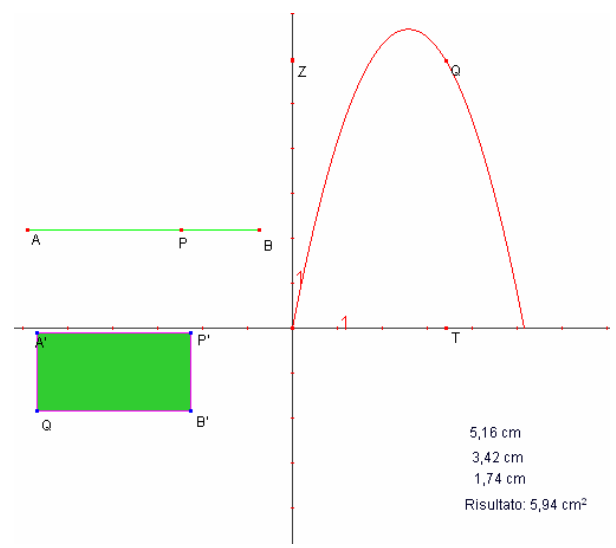
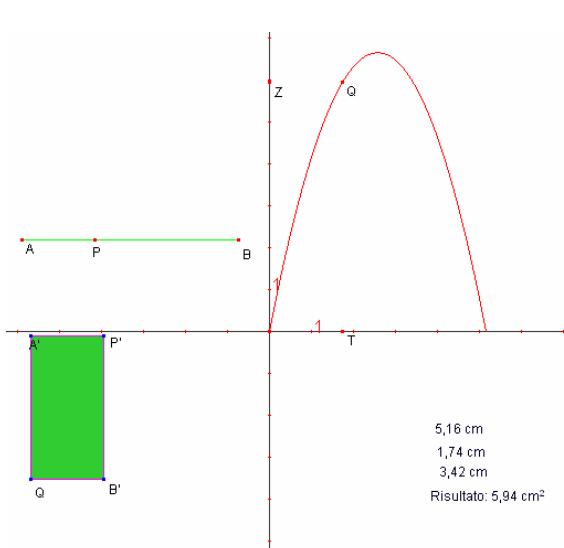
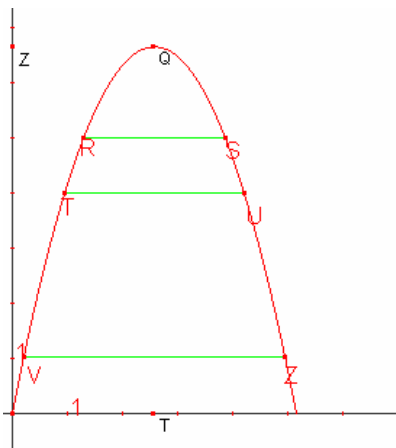
$$\text{Se } 2p = 5,16 \rightarrow \text{tale area misura } 13,3$$

Si osserva che se un lato misura $p/2$, anche l'altro lato misura $p/2$: in conseguenza, il rettangolo in questione è un **quadrato**.

Pertanto il rettangolo isoperimetrico con perimetro fissato ($2p = 2(5,16) = 10,32$) che ha area massima ($6,65 \text{ cm}^2$) è il quadrato con tale perimetro.



Se si considerano due punti della parabola aventi la stessa ordinata (y), si scopre che i due rettangoli risultanti, oltre ad essere isoperimetrici, hanno anche la medesima area, sono equivalenti (6,03 cm²). Questo perché le due figure piane derivano reciprocamente da punti tra loro simmetrici della parabola, e l'una è ribaltata rispetto all'altra.



Nei punti estremi della parabola, la figura degenera sino a apparire come un segmento.

