Irene Ocri, Giulia Guido,
Erica Meucci, Viviana Moschini

Classe I^a CL
Anno Scolastico 2008/09

"RELAZIONE SUI CHICCHI DI RISO"

Obiettivi:

- Elevare a potenza numeri naturali.
- Leggere e scrivere numeri naturali e decimali in base dieci usando la notazione scientifica.
- Individuare regolarità in contesti e fenomeni osservati.
- Produrre congetture relative all'interpretazione e spiegazione di osservazioni effettuate in diversi contesti.
- Calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica e di una progressione aritmetica

La professoressa Giorgetti ci ha posto un quesito partendo da questa storia:

La scacchiera:

Il gioco degli scacchi fu inventato in India. La prima volta che l'imperatore Chiram conobbe il gioco, ebbe una tale ammirazione peri il suo inventore, il saggio e povero Sessa, che volle ricompensarlo promettendogli tutto ciò che avesse desiderato.
Sessa chiese un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda casella, quattro per la terza e così di seguito raddoppiando fino alla 64^a.
L'imperatore, un po' offeso per la richiesta che gli pareva assai modesta, diede ordine di esaudire comunque il desiderio.

Quesiti:

1) Quanti sono i chicchi di riso corrispondenti a ciascuna casella?
2) Quanti sono i chicchi di riso che l'imperatore avrebbe dovuto dare a Sessa?

Abbiamo calcolato le potenze di 2, ma ci siamo fermati alla decima casella. Visto che i numeri diventavano sempre più grandi, abbiamo utilizzato Excel creando una tabella dove venivano riportati i numeri delle caselle, le potenze di 2, il valore delle potenze e la somma di chicchi di riso in totale.

n° casella	potenza di 2	valore	somma
1	2^0	1	1
2	2^1	2	3
3	2^2	4	7
4	2^3	8	15
5	2^4	16	31
6	2^5	32	63
7	2^6	64	127
8	2^7	128	255
9	2^8	256	511
10	2^9	512	1023

n° casella	potenza di 2	valore	somma
1	2^0	1	1
2	2^1	2	3
3	2^2	4	7
4	2^3	8	15
5	2^4	16	31
6	2^5	32	63
7	2^6	64	127
8	2^7	128	255
9	2^8	256	511
10	2^9	512	1023
11	2^10	1024	2047
12	2^11	2048	4095
13	2^12	4096	8191
14	2^13	8192	16383
15	2^14	16384	32767
16	2^15	32768	65535
17	2^16	65536	131071
18	2^17	131072	262143
19	2^18	262144	524287
20	2^19	524288	1048575
21	2^20	1048576	2097151
22	2^21	2097152	4194303
23	2^22	4194304	8388607
24	2^23	8388608	16777215
25	2^24	16777216	33554431
26	2^25	33554432	67108863
27	2^26	67108864	134217727
28	2^27	134217728	268435455
29	2^28	268435456	536870911
30	2^29	536870912	1073741823
31	2^30	1073741824	2147483647
32	2^31	2147483648	4294967295
33	2^32	4294967296	8589934591
34	2^33	8589934592	17179869183
35	2^34	17179869184	34359738367
36	2^35	34359738368	68719476735
37	2^36	68719476736	1,37439E+11
38	2^37	1,37439E+11	2,74878E+11
39	2^38	2,74878E+11	5,49756E+11
40	2^39	5,49756E+11	1,09951E+12
41	2^40	1,09951E+12	2,19902E+12
42	2^41	2,19902E+12	4,39805E+12
43	2^42	4,39805E+12	8,79609E+12
44	2^43	8,79609E+12	1,75922E+13
45	2^44	1,75922E+13	3,51844E+13
46	2^45	3,51844E+13	7,03687E+13
47	2^46	7,03687E+13	1,40737E+14
48	2^47	1,40737E+14	2,81475E+14
49	2^48	2,81475E+14	5,6295E+14
50	2^49	5,6295E+14	1,1259E+15
51	2^50	1,1259E+15	2,2518E+15
52	2^51	2,2518E+15	4,5036E+15
53	2^52	4,5036E+15	9,0072E+15
54	2^53	9,0072E+15	1,80144E+16
55	2^54	1,80144E+16	3,60288E+16
56	2^55	3,60288E+16	7,20576E+16
57	2^56	7,20576E+16	1,44115E+17
58	2^57	1,44115E+17	2,8823E+17
59	2^58	2,8823E+17	5,76461E+17
60	2^59	5,76461E+17	1,15292E+18
61	2^60	1,15292E+18	2,30584E+18
62	2^61	2,30584E+18	4,61169E+18
63	2^62	4,61169E+18	9,22337E+18
64	2^63	9,22337E+18	1,84467E+19

Tabella delle potenze di 2

Osservando la tabella, abbiamo dedotto che nella casella n c'erano 2^{n-1} chicchi di riso.

Per rispondere al secondo quesito abbiamo dovuto cercare delle regolarità.
Qualcuno ha osservato che il valore della terza colonna è uguale al doppio del valore della seconda colonna diminuito di 1, altri hanno osservato che tale valore è uguale al doppio del numero della riga precedente aumentato di 1,infine un altro gruppo ha notato che il valore della terza colonna è dato dal numero che compare nella riga successiva della seconda colonna diminuito di 1. (vedi tabella successiva)

N casella	Potenza di 2	valore	somma
1	2^0	1	1
2	2^1	2	3
3	2^2	4	7
4	2^3	8	15

Possiamo così osservare che per riempire tutte e 64 le caselle, dovremmo utilizzare 2^{64}-1 chicchi di riso.

I chicchi di riso che l' imperatore avrebbe dovuto dare a Sessa sarebbero ammontati ad un numero pari a 18.446.744.073.709.551.615 (1,84E+19).
Ma se non avessimo avuto a disposizione il foglio elettronico, avremmo potuto calcolare l'ordine di grandezza del numero dei chicchi di riso della 63ª casella, utilizzando le proprietà delle potenze.

$$2^{20} = (2^{10})^2 \approx (10^3)^2 = 10^6$$

$$2^{63} = 2^{60} * 2^3 \approx 8 * 10^{18}$$

Potenza del 2	valore numerico	corrispondente circa a	potenza del 10
2^{10}	1024	1000	10^3
2^{20}	1.084.576	1.000.000	10^6
2^{30}	1.073.741.824	1.000.000.000	10^9
2^{40}	1.099.511.627.776	1.000.000.000.000	10^{12}
2^{50}	1.125.899.906.842.624	1.000.000.000.000.000	10^{15}
2^{60}	1.152.921.504.606.846.976	1.000.000.000.000.000.000	10^{18}
2^{63}	9.223.372.036.854.775.808	8*1.000.000.000.000.000.000	10^{18}

Basterà 1 kg di riso per accontentare il bramino?

Per rispondere a questa domanda , dobbiamo sapere la massa di un chicco di riso. Ma come fare?
Ognuno di noi ha calcolato la massa di una manciata di riso e poi ha contato i chicchi di riso e quindi ha trovato la massa di un chicco di riso.
I valori ottenuti erano tutti diversi tra loro, in quanto anche all'interno della stessa confezione i chicchi sono tutti diversi. Abbiamo fatto quindi una media tra i valori ottenuti e abbiamo ottenuto che in media 16 chicchi di riso hanno massa 1g.

Sicuramente un Kg di riso non basterà, ma neanche la produzione mondiale annua di riso (11 milioni di quintali).

Quanti sacchi da 50kg si dovranno riempire?
Se un moderno autocarro può portare 80 sacchi, quanti veicoli occorrerebbero?

Abbiamo eseguito le seguenti equivalenze:
1 kg = 1000g
50 kg = 50 000 g
50 000 * 16= 800 000 chicchi di riso in 50kg

se 1 kg equivale a 1000 g, 50kg equivalgono a 50 000g,quindi facendo il prodotto tra 50 000 e 16(numero di chicchi di riso in ogni grammo) si ottiene il numero di chicchi presenti in 50 kg, cioè 800 000.

1,84E+19/ 800000 = 23058430092137sacchi totali
23058430092137/ 80 = 288.230.376.152 camion da utilizzare

Effettuando il quoziente tra il numero di chicchi di riso ottenuti con il primo esercizio della scacchiera, e la capienza dei sacchi in grammi, otteniamo il numero di sacchi in totale di cui avremo bisogno. Dividendo poi il numero di sacchi totale con il numero di sacchi che ogni autocarro riesce a trasportare, otteniamo **288.230.376.152**, cioè il numero di autocarri che dovremo utilizzare per trasportare tutti i sacchi.

Se anziché raddoppiare il n. di chicchi di riso, avesse triplicato il n. di chicchi di riso, qual è la formula che mi consente di calcolare il n. totale dei chicchi da mettere nelle prime n caselle?
Vale la stessa formula trovata precedentemente?

Appena la professoressa ci ha posto la seguente domanda una ragazza ha subito detto che la formula usata precedentemente non valeva ma che bisognava utilizzare il numero che compare nella riga successiva della seconda colonna diminuito di 1 e il risultato dividerlo per 2.
La professoressa ci ha spiegato che si trattava di una progressione geometrica di ragione 3 in quanto il quoziente tra ciascuno di essi e il precedente è costante e vale 3.
Per calcolare la somma dei primi 64 termini di una progressione geometrica, in cui il primo termine sia 1 si utilizza la seguente formula
$S_{64} = \frac{3^{64}-1}{3-1}$ in cui la base 3 è la ragione della progressione geometrica.
Infatti sia
$S_{64} = 1+3+3^2+...........+3^{63}$
Moltiplicando entrambi i membri per 3
$3S_{64} = 3(1+3+3^2+...........+3^{63})$ $3S_{64} = 3+3^2+3^3+...........+3^{64}$
Sottraendo membro a membro e semplificando i termini opposti si ottiene $S_{64} = \frac{3^{64}-1}{3-1}$

n° casella	potenza di 3	valore	somma
1	3^0	1	1
2	3^1	3	4
3	3^2	9	13
4	3^3	27	40
5	3^4	81	121
6	3^5	243	364
7	3^6	729	1093
8	3^7	2187	3280
9	3^8	6561	9841
10	3^9	19683	29524
11	3^10	59049	88573
12	3^11	177147	265720
13	3^12	531441	797161
14	3^13	1594323	2391484
15	3^14	4782969	7174453
16	3^15	14348907	21523360
17	3^16	43046721	64570081
18	3^17	129140163	193710244
19	3^18	387420489	581130733
20	3^19	1162261467	1743392200
21	3^20	3486784401	5230176601
22	3^21	10460353203	15690529804
23	3^22	31381059609	47071589413
24	3^23	94143178827	1,41215E+11
25	3^24	2,8243E+11	4,23644E+11
26	3^25	8,47289E+11	1,27093E+12
27	3^26	2,54187E+12	3,8128E+12
28	3^27	7,6256E+12	1,14384E+13
29	3^28	2,28768E+13	3,43152E+13
30	3^29	6,86304E+13	1,02946E+14
31	3^30	2,05891E+14	3,08837E+14
32	3^31	6,17673E+14	9,2651E+14
33	3^32	1,85302E+15	2,77953E+15
34	3^33	5,55906E+15	8,33859E+15
35	3^34	1,66772E+16	2,50158E+16
36	3^35	5,00315E+16	7,50473E+16
37	3^36	1,50095E+17	2,25142E+17
38	3^37	4,50284E+17	6,75426E+17
39	3^38	1,35085E+18	2,02628E+18
40	3^39	4,05256E+18	6,07883E+18
41	3^40	1,21577E+19	1,82365E+19
42	3^41	3,6473E+19	5,47095E+19
43	3^42	1,09419E+20	1,64128E+20
44	3^43	3,28257E+20	4,92385E+20
45	3^44	9,84771E+20	1,47716E+21
46	3^45	2,95431E+21	4,43147E+21
47	3^46	8,86294E+21	1,32944E+22
48	3^47	2,65888E+22	3,98832E+22
49	3^48	7,97664E+22	1,1965E+23
50	3^49	2,39299E+23	3,58949E+23
51	3^50	7,17898E+23	1,07685E+24
52	3^51	2,15369E+24	3,23054E+24
53	3^52	6,46108E+24	9,69162E+24
54	3^53	1,93832E+25	2,90749E+25
55	3^54	5,81497E+25	8,72246E+25
56	3^55	1,74449E+26	2,61674E+26
57	3^56	5,23348E+26	7,85021E+26
58	3^57	1,57004E+27	2,35506E+27
59	3^58	4,71013E+27	7,06519E+27
60	3^59	1,41304E+28	2,11956E+28
61	3^60	4,23912E+28	6,35867E+28
62	3^61	1,27173E+29	1,9076E+29
63	3^62	3,8152E+29	5,72281E+29
64	3^63	1,14456E+30	1,71684E+30

Tabella delle potenze di 3

Se, invece, mettessimo un chicco nella prima casella, e nella successiva ne aggiungessimo un altro e così proseguendo, che cosa si ottiene?

n° casella	valore	somma
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55
11	11	66
12	12	78
13	13	91
14	14	105
15	15	120
16	16	136
17	17	153
18	18	171
19	19	190
20	20	210
21	21	231
22	22	253
23	23	276
24	24	300
25	25	325
26	26	351
27	27	378
28	28	406
29	29	435
30	30	465
31	31	496
32	32	528
33	33	561
34	34	595
35	35	630
36	36	666
37	37	703
38	38	741
39	39	780
40	40	820
41	41	861
42	42	903
43	43	946
44	44	990
45	45	1035
46	46	1081
47	47	1128
48	48	1176
49	49	1225
50	50	1275
51	51	1326
52	52	1378
53	53	1431
54	54	1485
55	55	1540
56	56	1596
57	57	1653
58	58	1711
59	59	1770
60	60	1830
61	61	1891
62	62	1953
63	63	2016
64	64	2080

Abbiamo sommato i chicchi della 1 casella con i chicchi dell'ultima casella e il risultato è 65. Abbiamo continuato sommando la 2 con la penultima, la terza con la terzultima e così via. Fino ad esaurire le caselle. Così facendo abbiamo notato che tutte le somme davano come risultato 65, abbiamo quindi moltiplicato la somma (65) per il numero delle addizioni eseguite (32).
65*32=2080 chicchi di riso in totale.

Si tratta di una progressione aritmetica in quanto la differenza tra due termini consecutivi è sempre costante e vale 1.
Quindi la somma dei primi n numeri naturali si calcola con la seguente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Ultima osservazione

Riprendendo la prima tabella delle potenze di 2, possiamo trovare evidenziati in giallo i numeri di Mersenne primi M_n che si ottengono dalla formula $2^n - 1$ con n numero primo.
Se M_n è primo, allora anche n è primo. Invece n primo non garantisce che M_n sia primo.
Ad esempio 67 è primo ma non lo è M_{67}.
Se M_n non è primo, viene detto semplicemente numero di Mersenne.
L'ultimo numero primo di Mersenne $M_{37156667}$ è stato scoperto il 6 settembre 2008 e contiene 11185272 cifre