I.T.S.T. “ARTEMISIA GENTILESCHI”

MILANO

“LE GRANDEZZE INCOMMENSURABILI & I NUMERI IRRAZIONALI”

CLASSE 3D_LINGUISTICO

Supervisore

Prof.ssa Quarta Antonella

Anno Scolastico 2007/2008

INDICE

L'attività svolta dai matematici moderni è molto diversa da quella dei primi matematici delle civiltà antiche. Inizialmente la matematica si basò sul concetto di numero; concetto sviluppatosi nella preistoria. La matematica è stata una tra le prime discipline a svilupparsi. Evidenze archeologiche mostrano la conoscenza rudimentale di alcune nozioni matematiche molto prima dell'invenzione della scrittura.

1.Cenni sulla storia della MATEMATICA

Un aspetto importante della storia della matematica consiste nel fatto che essa si è sviluppata indipendentemente in culture completamente differenti che arrivarono agli stessi risultati. Spesso un contatto o una reciproca influenza tra popoli differenti ha portato all'introduzione di nuove idee e a un avanzamento delle conoscenze matematiche. A volte si è vista invece una decadenza improvvisa della cultura matematica presso alcuni popoli che ne ha rallentato lo sviluppo. La matematica moderna ha invece potuto avvalersi dei contributi di persone di tutti i paesi.

1.1 La scena si sposta nell'Ellade

L'attività intellettuale delle civiltà potamiche dell'Egitto e della Mesopotamia si era esaurita molto prima dell'era cristiana; ma, mentre il sapere andava declinando nelle valli attraversate dal Nilo e dal Tigri e dall'Eufrate e il bronzo cedeva il posto al ferro nella fabbricazione delle armi, vigorose e nuove culture e sbocciavano un po' dovunque lungo le coste del mediterraneo. L'inizio della storia greca risale al II millennio a.C. allorché incolti invasori calarono dalle regioni settentrionali; non portavano con sé nessuna tradizione matematica o letteraria, ma furono pronti ad assorbire la cultura degli altri popoli e in breve tempo realizzarono progressi che andavano al di là di ciò che avevano appreso da altre civiltà. Per esempio, essi ereditarono, forse dai Fenici, un alfabeto forse già esistente, consistente soltanto di consonanti, al quale essi aggiunsero le vocali. Questo nuovo alfabeto si diffuse nelle colonie- greche, romane, cartaginesi - attraverso le attività mercantili. Si presume che alcuni rudimenti del calcolo si siano diffusi attraverso i medesimi canali ma è probabile che le parti più esoteriche della matematica sacerdotale siano rimaste senza diffusione. Non passò molto tempo perché mercanti, commercianti e uomini dotti provenienti dalla Grecia si aprissero una via diretta verso i centri del sapere in Egitto e Babilonia. Qui vennero in contatto con la matematica pre-ellenica. Essi, tuttavia, non si limitarono soltanto a far proprie le tradizioni già da lungo tempo consolidate, ma assimilarono le conoscenze matematiche in maniera così profondamente originale che la matematica nel suo complesso assunse ben presto una fisionomia nettamente diversa. I primi giochi olimpici si tennero nel 776 a.C.; in tale data si era già sviluppata una fiorente letteratura greca; sulla matematica greca del tempo, invece, non sappiamo nulla. È presumibile che essa fosse ancora molto arretrata rispetto allo sviluppo delle forme letterarie – giacché queste ultime si prestavano più facilmente a una trasmissione orale continua. Dovevano perciò, passare ancora quasi due secoli prima che si potesse parlare anche indirettamente di matematica greca. Poi, durante il VI secolo a.C. apparvero due uomini, Talete e Pitagora che sembra abbiano svolto nel campo della matematica un ruolo simile a quello di Omero e di Esiodo nel campo della letteratura. Talete e Pitagora sono figure storicamente abbastanza confuse; infatti non c'è stato conservato alcun capolavoro matematico attribuibile all'uno o all'altro, e non si sa neppure con certezza se Talete o Pitagora ne abbiano composto uno.

Per quella che spesso viene chiamata *matematica greca* è opportuno distinguere due periodi. Nel primo periodo, quello della massima importanza economica e politica delle città greche e delle loro colonie, si colloca la matematica sviluppata dai matematici di queste città. Nel successivo periodo ellenistico (che si può far iniziare nel 323 a.C. e concludere intorno al V secolo dopo Cristo) si colloca la produzione di tutti gli autori che operarono nel mondo ellenistico accomunati dell'uso della lingua greca. Molte delle più grandi menti di questo periodo come Archimede e Apollonio non vissero nell'area geografica corrispondente all'attuale Grecia, pur essendo protagonisti della cultura ellenistica di lingua greca diffusasi in molte aree mediterranee.

Per quanto i più antichi testi di matematica trovati in greco siano stati scritti posteriormente al periodo ellenistico, parecchi di essi vengono ritenuti copie di opere scritte durante e anche prima di questo periodo. Nondimeno, la datazione della matematica greca è più attendibile rispetto a quella degli scritti matematici più antichi, poiché esistono numerose cronologie che, sovrapponendosi, riportano gli avvenimenti anno per anno fino ad oggi.
La matematica greca è molto più moderna di quella sviluppata dalle precedenti culture quali quella egiziana e babilonese, in quanto tali precedenti culture utilizzavano il ragionamento empirico che sfrutta le osservazioni ripetute per fondare le regole della matematica. La matematica greca antica, all'opposto, si basa sul ragionamento deduttivo, che partendo da assiomi più o meno scontati usa rigorosi ragionamenti per dimostrare teoremi. Su questa idea ancor oggi si basa tutta la matematica moderna. I Greci si occuparono quasi esclusivamente di Geometria e, secondo i loro canoni si potevano usare solo due strumenti per la costruzione e lo studio di figure geometriche: la riga (non taccata) e il compasso (che si chiudeva non appena sollevato dal foglio, e quindi non poteva servire per riportare una misura). Ragionamenti che coinvolgevano altri strumenti erano a volte utilizzati, ma venivano considerati non rigorosi.
Si ritiene che la matematica greca abbia avuto inizio con Talete di Mileto (624-546 a.C. ca.) e Pitagora di Samo (582 — 507 a.C. ca.). Questi furono probabilmente influenzati dalle idee della matematica egiziana, della matematica babilonese e della matematica indiana, per quanto la rilevanza di questa influenza sia dibattuta.
Talete si occupò di geometria, scoprendo per esempio il teorema secondo il quale un triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre rettangolo e molte proposizioni riguardanti i triangoli simili. Grazie a tali teoremi, secondo la leggenda, riuscì a determinare l'altezza della piramide di Cheope, misurando la sua ombra. L'importanza di Talete però sta nel fatto che egli fu il forse il primo a capire l'importanza della dimostrazione nei suoi ragionamenti.

Pitagora, invece, fu il fondatore della Scuola Pitagorica, una setta i cui membri si dedicavano alla ricerca matematica. La scuola pitagorica presentava anche connotazioni filosofiche e mistiche: i membri per esempio seguivano ideali di perfezione nel numero cinque (e quindi al pentagono e al dodecaedro) e nella sfera. Tutta la filosofia della setta era fondata sui numeri naturali e sui loro quozienti, i numeri razionali. Questa comunità diede importanti contributi alla geometria, primo fra tutti la dimostrazione del Teorema di Pitagora (sembra già trovato empiricamente da egiziani e babilonesi) e alla teoria dei numeri, come la classificazione e lo studio dei numeri figurati e dei numeri perfetti, la scoperta delle terne pitagoriche e del crivello di Eratostene.

Paradossalmente, la scoperta più importante della comunità fu forse la dimostrazione che il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato (ossia radice di 2) non è esprimibile come rapporto di due interi. Questa scoperta, che prova l'esistenza dei numeri irrazionali, andava contro a tutta la filosofia della setta. Oggi si ritiene più probabile che la dimostrazione dell'irrazionalità sia più tarda e che i pitagorici abbiano osservato l'irrazionalità della diagonale del pentagono di lato unitario (ossia sezione aurea).

<u>1.2 Il teorema nell’estrema antichità</u>

I testi matematici più antichi provengono dall'antico Egitto, nel periodo del Regno di mezzo, (ca 2000-1800 a.C.) (papiro di Berlino), dalla Mesopotamia, (ca 1900-1700 a.C.) (tavoletta Plimpton 322) e dall'India, (ca 800 - 600 a.C.) (Sulba Sutras). Tutti questi testi toccano il cosiddetto ***teorema di Pitagora***, *<u>che sembra essere il più antico e diffuso risultato matematico che va oltre l'aritmetica e la geometria elementari.</u>*

La prima testimonianza nota relativa al teorema di Pitagora è contenuta in una tavoletta paleobabilonese, databile tra il 1800 e il 1600 a. C., in cui è disegnato un quadrato con le due

Tavoletta paleobabilonese, databile tra il 1800 e il 1600 a.C.

diagonali. Il lato del quadrato porta il numero 30, lungo la diagonale troviamo i numeri (in notazione sessagesimale) 1;24,51,10, cioè $1+24/60+51/60^2+10/60^3$,e 42;25,35, ovvero $42+25/60+35/60^2$, che riportati in forma decimale danno 1,414213 e 42,42639. Il primo è un'ottima approssimazione della radice di 2; il secondo è la diagonale del quadrato di lato 30, ed è uguale al prodotto di 30 per il primo numero. Il fatto che la diagonale del quadrato si ottenga moltiplicando il suo lato per la radice di 2 denota la conoscenza del teorema di Pitagora, almeno nel caso del triangolo con i cateti uguali.

I risultati algebrici raggiunti dai babilonesi sono ammirevoli, ma le motivazioni che stanno alla base delle loro ricerche non sono facilmente percepibili. Si è comunemente supposto che virtualmente tutta la scienza e la matematica pre-elleniche fossero puramente utilitaristiche; ma che genere di questioni pratiche concrete potevano spingere gli antichi babilonesi a trattare problemi matematici che comportavano la somma di un numero con il suo reciproco o la differenza tra un'area e una lunghezza? Se il motivo era utilitaristico, il senso dell'immediatezza doveva essere allora meno forte di oggi, giacché l'esistenza di rapporti diretti tra gli scopi e la prassi della matematica babilonese appaiono tutt'altro che evidenti. Non è escluso che lo studio della matematica come fine a se stesso fosse non soltanto tollerato, ma addirittura incoraggiato: ciò è suggerito da un'altra tavoletta, della Plimpton Collection (n. 322) alla Columbia University. La tavoletta risale al periodo babilonese antico (ca 1900-1600 a.C.), e le tabelle che essa contiene potrebbero facilmente essere prese a prima vista per registrazioni di conti commerciali. Un'analisi più approfondita, però, mostra che essa possiede un profondo significato matematico dal punto di vista della teoria dei numeri e che forse si ricollegava a una forma embrionale trigonometrica. La tavoletta Plimpton 322 faceva parte di una più grande, come mostra la spaccatura lungo l'orlo sinistro: il frammento pervenutoci contiene quattro colonne di numeri disposti su quindici file orizzontali, e serve evidentemente a indicare l'ordine di successione delle cifre elencate nelle altre tre colonne.
La tavoletta non è in condizioni così eccellenti da permettere di leggere ancora tutti i numeri, ma lo schema costruttivo chiaramente discernibile nella tabella ha reso possibile determinare in base al contesto le poche cifre mancanti per effetto di piccole rotture.

Più dubbie le altre attribuzioni. Quella più volte ripetuta, secondo la quale i geometri egizi, per trovare un angolo retto, si servivano di una corda con segnati tratti di lunghezza 3, 4 e 5, che formano i lati di un triangolo rettangolo, sembra sprovvista di ogni fondamento, e semmai ha a che fare con l'inverso del teorema di Pitagora.

Anche la figura cinese "hsuan-thu", che risale forse (ma la datazione è incerta) al 1200 a. C., è stata vista da alcuni come una prova della conoscenza del teorema di Pitagora, ma questa affermazione è controversa. In effetti la figura mostra un triangolo di lati 3, 4 e 5, con il quadrato di lato 7=3+4 che contiene quello di lato 5, a sua volta composto da quattro triangoli e un quadratino di lato 1=4-3. Non c’è invece traccia dei quadrati sui cateti 3 e 4. In generale, se si indicano con a e b i cateti e con c l’ipotenusa, il quadrato di lato $a + b$ si può considerare composto di 8 triangoli e del quadratino di lato $b - a$, o anche del quadrato sull’ipotenusa c e di quattro triangoli, da cui si ricava la relazione $4ab+ (b - a)^2 = c^2 +2ab$. Sviluppando $(b - a)^2 = b^2 + a^2 -2ab$, si ottiene $b^2 + a^2 = c^2$ *e quindi il teorema di Pitagora, purché si conosca la formula del quadrato del binomio* $(b - a)^2 =b^2 + a^2 -2ab$. *Inutile dire che quest’ultima formula, specie nella sua versione geometrica che qui sembra necessaria, non è per nulla più facile del teorema di Pitagora che si vuole dimostrare.*

In ogni caso, non abbiamo né un enunciato preciso del teorema, né tanto meno una sua dimostrazione.

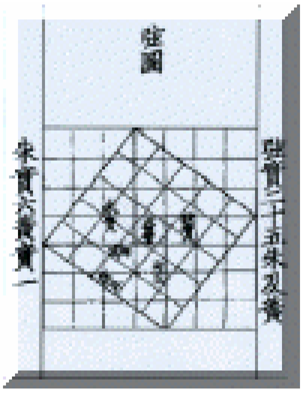


Figura cinese “hsuan-thu” datata intorno al 1200 a.C.

2.Pitagora e i pitagorici

Il numero come arché

2.1 Le scuole pitagoriche e l'insegnamento di Pitagora

La filosofia dei pitagorici, originaria delle regioni ioniche, si sviluppa nelle colonie italiche della Magna Grecia e di qui, nel V secolo a.c., si diffonde nella Grecia continentale.
Le testimonianze in nostro possesso presentano la scuola pitagorica come una comunità dagli interessi scientifici e religiosi, - il pitagorismo risente di molteplici influenze: la filosofia ionica (Pitagora fu forse allievo di Anassimandro), l'orfismo, i culti dionisiaci ed eleusini, le religioni orientali che Pitagora probabilmente conobbe durante i suoi numerosi viaggi- aperta anche alle donne, agli stranieri, che imponeva un duro periodo di noviziato, durante il quale, prima d'essere ammessi ai segreti della setta, si era sottoposti a prove rigorose e a riti purificatori.
Gli appartenente alla setta dovevano attenersi a una sorta di catechismo che regolava la vita pubblica e privata: rispettare gli dei, fare ogni sera un esame di coscienza e ogni mattina un programma per il giorno che iniziava; non cibarsi di carne e fave, non spezzare il pane o attizzare il fuoco con metallo, non indossare panni di lana o anelli, non raccogliere ciò caduto. Occorreva rispettare la regola del silenzio, praticare la comunione dei beni e non si era mai ammessi alla presenza del maestro (Pitagora), che parlava ai novizi nascosto dietro a una tenda.
Gli insegnamenti venivano tramandati oralmente e su di essi si doveva mantenere il segreto. La divulgazione dei segreti al di fuori della cerchia degli iniziati poteva costare anche la morte.
I pitagorici avevano una visione "matematica" del mondo, una prospettiva in cui tutto doveva essere ricondotto al numero. Nell'ambito delle ricerche matematiche da loro effettuate, i loro studi sui numeri pari e dispari, sui numeri primi e sugli irrazionali furono fondamentali per la teoria dei numeri.

Da questo punto di vista teorico, essi svilupparono il concetto di numero, che divenne per loro il principio della proporzione e della perfetta armonia dell'universo. Il numero è arché, cioè l'origine di tutto, è inteso come l'elemento ordinatore della realtà, è il limite contrapposto all'illimitato, l'ordine contrapposto al disordine.

In questa prospettiva si inserisce quello che viene chiamato dualismo pitagorico; è la disparità che c'è tra i numeri pari e quelli dispari che rappresenta la contrapposizione fra limite ed illimitato. Grazie a questi studi i pitagorici fondarono scientificamente la matematica.

In geometria la grande scoperta dei pitagorici fu il teorema di Pitagora, il quale asserisce che nei triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Di questo si avrà modo di discutere più oltre.

La scuola pitagorica è dedita soprattutto allo studio delle matematiche: aritmetica, geometria e teoria musicale.
Pitagora elabora una "teoria del principio di tutte le cose", ricondotta ai numeri e i numeri a due principi supremi opposti: il Limite e l'Illimitato; aveva inoltre osservato che la riduzione delle cose ai numeri si fondava su somiglianze tra realtà diverse: i rapporti tra corde della lira di diverse grandezze, dischi di bronzo di diverso spessore o vasi riempiti in diversa misura.
I pitagorici attribuivano ai numeri proprietà non solo matematiche: ad es. consideravano perfetta la tetrade, in quando espressione di un solido geometrico, o la decade in quando somma dei primi quattro numeri. Essi ritenevano che i quattro elementi avessero come limite, cioè come struttura, i quattro solidi geometrici regolari, tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e l'universo intero avesse come struttura la sfera.
Proclo afferma che altre dottrine nel campo della matematica possano esser attribuite ai pitagorici.

2.2 Cenni su PITAGORA di SAMO

Pitagora da Samo (575 - 490 ca. a.C.), filosofo e matematico greco, eredita i temi dell'antica tradizione ionica di Talete, Anassimene e Anassimandro e viene a contatto con i culti misterici e con la religione babilonese (è probabile, infatti, che la sua filosofia abbia subito influenze orientali). Non scrive nulla e le notizie sulla sua vita sono lacunose.
Fondatore, inoltre, dell'omonima scuola, testimonianze dicono che fu allievo di Anassimandro e raccontano di viaggi da lui compiuti in Oriente (non vi è certezza storica di questi), nei quali sarebbe venuto in contatto con la sapienza degli egizi, persiani, caldei, ebrei, indiani e dove avrebbe appreso elementi della geometria. Verso i 40 anni lascia Samo ed emigra in Magna Grecia, a Crotone, colonia dorica sulla costa orientale della Calabria; ivi fonda una comunità (una sorta di setta politico-religiosa) e una scuola che avranno grande sviluppo, godendo i favori del governo aristocratico della città, in concomitanza della fioritura della scuola medica di Alcmeone.
Pitagora, secondo la testimonianza di Proclo, avrebbe compiuto delle scoperte matematiche di capitale importanza:

- Il teorema sulla somma degli angoli del triangolo (uguale a due retti);
- Il celebre teorema detto "di Pitagora" sul triangolo rettangolo (il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti);
- La costruzione dei poligoni regolari;
- I problemi di "applicazione delle aree" (serie di problemi che traducono geometricamente le equazioni di primo e secondo grado).
- Gli irrazionali

I pitagorici studiarono, con particolare interesse, i poligoni e i solidi regolari; il pentagono e la stella pentagonale a cinque punte pare che avessero affascinato talmente tanto il grande maestro che li pose come simbolo della scuola.

La fama del filosofo si diffuse in tutta la Magna Grecia, fino a Roma. La sua figura divenne leggendaria e venerata dai discepoli come quella di un dio.
Sul piano scientifico, non siamo in grado di attribuire a Pitagora teorie precise. Le dottrine astronomiche della scuola furono forse sviluppate dai suoi discepoli. Il teorema che porta il suo nome si deve ad altri, anche se forse Pitagora ne conosceva il significato.

Legati alla casta sacerdotale, i pitagorici acquistarono un rilevante peso politico nelle *poleis* italiche. La tradizione racconta che, a Crotone, nel corso di una sommossa popolare, venne incendiata la casa dove erano riuniti i maggior esponenti della setta. Riuscirono a salvarsi solo Archippo e Liside. Pitagora si era ritirato a Metaponto, dove era morto prima della rivolta.
Secondo una diversa versione dell'accaduto, egli, assente alla riunione, riuscì a fuggire a Metaponto, dove morì verso il 497-490 a.C.

2.3 L'insegnamento dogmatico di Pitagora

In base alle testimonianze a noi giunte, non è possibile distinguere la dottrina di Pitagora da quella dei suoi discepoli. Anche Aristotele si riferisce ai cosiddetti "pitagorici", senza distinguere tra essi e

il fondatore della scuola.
La scuola pitagorica era una comunità dagli interessi scientifici e religiosi che si sviluppò nel V secolo a.C. Gli appartenenti alla setta dovevano attenersi a una sorta di catechismo che regolava la vita pubblica e privata. Gli insegnamenti venivano tramandati oralmente e su di essi si doveva mantenere il segreto.
In base alle testimonianze a noi giunte, non è possibile distinguere la dottrina di Pitagora da quella dei suoi discepoli.
L'insegnamento di Pitagora veniva appreso come una rivelazione divina, in forma dogmatica, come attesta la formula rituale in uso nella setta autòs èphe: "lo ha detto lui".
La dottrina veniva impartita attraverso un elenco di domande e di risposte in forma di sentenza.
I discepoli erano divisi in acusmatici (dal verbo greco *akouein*, ascoltare), o ascoltatori, ai quali era imposto il silenzio, e matematici (da *manthanein*, apprendere), che potevano fare domande, avere accesso ai segreti più importanti e possedere opinioni personali.
[distinzione tra acusmatici e matematici potrebbe anche aver indicato la divisione che si produsse tra gli uomini di fede, dediti ad approfondire l'indirizzo religioso della dottrina, e gli uomini di scienza che coltivavano gli studi teorici]
Tra i discepoli crotoniati di Pitagora i più noti erano il medico Alcmeone, il poeta Epicarmo e Ippaso, il capo dei matematici, che finì espulso o condannato a morte, forse per aver aver divulgato uno dei segreti matematici più gelosamente custoditi dalla comunità. Scuole pitagoriche erano anche quelle di Archippo a Reggio e di Archita a Taranto. Le comunità pitagoriche erano di tendenza aristocratica e godevano dell'appoggio dei governi delle colonie. Questa politica antidemocratica fu forse la causa della loro sconfitta politica e della dispersione delle scuole.
Dopo la cacciata dalle colonie italiche, il pitagorismo, tuttavia, non scomparve. Nuove comunità si formarono a Tebe, per opera di Filolao.

2.4 Il numero come principio della realtà

Aristotele afferma, come già detto, che per i pitagorici ***arché è numero***; una delle massime pitagoriche recitava: "che cosa c'è di più saggio? il numero. Che cosa c'è di più bello? l'armonia".
Quale concezione di numero avevano i pitagorici? E che cosa significa porre il numero come principio di tutte le cose?
Essi non consideravano i numeri come entità astratte, bensì concrete, ossia come grandezze spaziali, aventi estensione e forma, rappresentate geometricamente mediante configurazioni di punti. L'unità veniva designata come un punto, i numeri successivi attraverso figure geometriche costruite da insiemi di punti e indicate attraverso l'uso di sassolini. I numeri sono dunque, per i pitagorici, cose reali. Per questo, la scuola pitagorica poté scorgere in essi, piuttosto che nell'acqua e nell'aria, gli elementi e le proprietà dei numeri fossero gli elementi costitutivi e fondamentali di cui cose sono costituite.
Dai numeri derivano tutte le cose, nel senso che le cose e le relazioni tra di esse sono esprimibili attraverso determinazioni numeriche. Constatando come l'armonia musicale si fondasse su rapporti numerici, i pitagorici conclusero che gli elementi e le proprietà fondamentali delle cose e che l'universo fosse, sul modello della musica, numero e armonia. Per questo essi videro nella scienza del numero la via per la conoscenza della natura più profonda delle cose: il numero rende intelligibile la realtà, in quanto ne rivela struttura quantitativa, geometrica. I numeri esprimono la sostanza delle cose e a ogni cosa corrisponde un numero: dunque la natura è ordinabile e misurabile attraverso la matematica.
Non estranea a queste condizioni fu anche la rivelazione dell'importanza dei numeri nei fenomeni della vita: le stagioni e gli anni, i mesi e le ore, i cicli naturali seguono infatti un tempo che è regolato da numeri.

Confronti

Il sapere degli ionici era naturalistico, legato alle scienze e alle tecniche, volto alla ricerca di spiegazioni razionali dei fenomeni della natura. Con i pitagorici la figura del filosofo si confonde invece con quella del sacerdote e dell'oracolo, dell'educatore.

Focus - la dottrina della trasmigrazione delle anime -

Le fonti attribuiscono al pitagorismo la dottrina della metempsicosi (dal greco metempsychosis, passaggio delle anime). Influenzata dall'orfismo e forse dalle religioni orientali, essa sosteneva la trasmigrazione o reincarnazione delle anime: l'anima, di origine divina, per potersi liberare dalla prigionia del corpo in cui è stata obbligata a incarnarsi a causa di una colpa originaria, e in cui si trova come in una tomba, deve passare attraverso molte vite e trasmigrare in corpi successivi, sia animali, sia umani, fino a giungere alla purificazione finale (catarsi), dopo la quale potrà tornare alla patria celeste. Giustificato da questa teoria era forse il divieto, in vigore tra i pitagorici, di cibarsi di carne di quegli animali in cui poteva trovarsi incarnata un'altra anima.

← PURIFICAZIONE ANIMA →
PITAGORISMO
ORFISMO

cammino di conoscenza e studio (il sapiente come incarnazione suprema dell'anima purificata)	apertura mistica alla rivelazione divina attraverso pratiche misteriche e iniziatiche

2.5 La dottrina dei numeri: pari, dispari, impari

Secondo i pitagorici, tutte le opposizioni tra le cose vanno ricondotte a opposizioni tra i numeri. L'opposizione numerica fondamentale è quella tra pari e dispari: pari è quel numero che può essere diviso in due parti uguali, entrambe pari o entrambe dispari; una volta diviso il numero dispari, invece, se una sua parte è pari, l'altra è obbligatoriamente dispari.
Si sottrae a questa distinzione l'Uno, che i pitagorici chiamavano parimpari, perché se è sommato a un numero pari diventa dispari e se sommato a un numero dispari diventa pari. Per questo l'Uno ha in sé sia la natura del pari, sia quella del dispari.
I pitagorici collegavano la distinzione tra pari e dispari a quella tra limite (péras) e illimitato (apeiron). Nei numeri pari domina l'illimitato: per questo essi sono imperfetti; in quelli dispari domina il limite: per questo essi sono perfetti.
Dietro questo concetto astratto della contrapposizione tra pari e dispari, si cela una visione del mondo in cui il bene, l'ordine e la perfezione stanno dalla parte del dispari, mentre il male, il disordine e l'imperfezione stanno da quella dei pari. Il mondo è armonico ed è un ordine misurabile. Tutta questa concezione del mondo entra in crisi, non appena, in conseguenza del famoso teorema di Pitagora, si scoprono i numeri irrazionali, quei numeri non appartenenti al campo dei razionali, quindi non riducibili a frazioni, cioè non misurabili, non quantificabili.

Inoltre, se immaginiamo i numeri come un insieme di punti geometricamente disposti, quando il numero dispari viene diviso in due parti, rimane sempre interposta tra esse un unità che pone un limite alla divisione.
Il numero dispari è dunque sempre delimitato. Al contrario, quando viene diviso in due parti il pari, rimane un campo vuoto, senza limite. La figura risultante in questo caso è aperta, non determinata e squadra" quindi imperfetta.

Per studiare le proprietà dei numeri, i pitagorici li rappresentavano disponendoli " a squadra", in modo da formare un angolo retto. È possibile generare tutti i numeri dispari partendo dall'unità e applicando ripetutamente la squadra. Nel caso dei numeri pari invece, se i punti vengono disposti in parti uguali lungo i lati, viene a mancare il vertice della squadra, ossia l'elemento divisore. I numeri pari erano considerati “numeri rettangolari”, quelli dispari “numeri quadrati”. Infatti, se, come una figura a sinistra, disponiamo a squadra attorno al numero uno le unità costituenti i numeri dispari (3,5,7 ecc), otterremo sempre un quadrato. Viceversa, se, come nella figura a destra, inquadriamo le unità costituenti i numeri pari (2, 4 6 ecc) ne risulterà sempre un rettangolo. A ogni numero corrisponde una figura geometrica determinata: l'uno è il punto, il due la linea, il tre il triangolo (per i pitagorici “figura piana primissima”), il quattro il tetraedro (“figura solida primissima”).

Quadrato – rettangolo

Inizialmente, i matematici pitagorici avevano concepito la linea come una successione finita di punti di dimensioni finite. Tale concezione, chiamiamola così, *granulare* della linea presentava il vantaggio di consentire uno stretto collegamento fra geometria ed aritmetica. In pratica, per conoscere la misura della lunghezza di una determinata linea è sufficiente contare i punti che la costituiscono. Se raddoppiamo la lunghezza della linea, basterà raddoppiare il numero dei punti; se la triplichiamo, basterà triplicarlo; e così via.
Alla base di questa concezione vi è l'idea del punto come elemento matematico corrispondente all'unità e perciò, in qualche modo, esteso e occupante una data posizione nello spazio.
In seguito alla considerazione dei pitagorici riguardo al numero, come principio di tutte le cose, Aristotele dice che essi dividevano i numeri in due grandi categorie: pari e dispari, connettendo il pari con l'infinito e il dispari con il finito.
Da questi due principi i pitagorici facevano derivare una serie di coppie di opposti.

Aristotele, nella sua *Metafisica* (libro I, capitolo V) scrive:
"Altri pitagorici affermarono che i principi sono dieci, divisi in serie di contrari:
1) limite - illimite,
2) dispari - pari,
3) uno - molteplice,
4) destro - sinistro,
5) maschio - femmina,
6) immobile- in movimento,
7) retto - curvo,
8) luce - tenebra,
9) buono - cattivo.
10) quadrato - rettangolo."

Ora, vogliamo soffermare la nostra attenzione sulla seconda e sull'ultima coppia di termini: di natura aritmetica i primi, di natura geometrica i secondi.

Che cosa avranno voluto intendere, i Pitagorici (giusta la notizia riferita da Aristotele), contrapponendo il quadrato al rettangolo, così come avevano contrapposto il dispari e il pari? Si noti, per inciso, l'ordine della coppia: prima il dispari, poi il pari (al contrario di quello che a noi moderni verrebbe spontaneo fare): perché l'uno precede il due - non essendo ancora stato inventato lo zero - e, quindi, l'unità precede, in ordine logico, il numero che viene dopo l'unità, ossia il primo dei numeri pari (divisibili esattamente per due).
Evidentemente, i Pitagorici contrapponevano il quadrato al rettangolo (così come il dispari e il pari) perché, se noi immaginiamo il punto come unità estesa e la linea come una linea granulare (formata da una successione di punti estesi), basterà aggiungere un singolo punto a ciascuno dei due lati opposti di un qualsiasi quadrato per trasformarlo, *ipso facto*, in un rettangolo; ossia per passare, in un colpo solo, da un ordine di figure a un altro ordine di figure. Proprio come, aggiungendo un numero all'unità, si passa *ipso facto* dall'ordine dei numeri dispari all'ordine dei

numeri pari (divisibili esattamente per due).
Semplice ed elegante.

Scrive Attilio Frajese in *Introduzione elementare alla matematica moderna* (Firenze, Le Monnier Editore, 1972, vol. 1, p. 64):

"Ma questa concezione non poté essere mantenuta quando si giunse a trovare la prima coppia di linee incommensurabili: il lato e la diagonale di qualunque quadrato (ed è questa una mirabile scoperta*: una delle più grandi scoperte dell'umanità, che segna l'inizio della vera matematica).*
"Si tratta di questo: non esiste un segmentino di retta, per quanto piccolo si scelga, che sia contenuto esattamente un numero intero di volte tanto nel lato quanto nella diagonale di qualunque quadrato: cioè lato e diagonale del quadrato non possono essere ambedue esattamente misurati *insieme da una misura, vale a dire non sono* commensurabili*, ma sono* incommensurabili.
"Si tratta di un fatto che non può essere stabilito con alcun mezzo sensibile o sperimentale: ad esso si giunge soltanto in forza di un ragionamento, sicché potrebbe per esso parlarsi di una grande vittoria della ragione sui sensi."

Platone, nel *Menone,* tratta appunto della scoperta della incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato: ne abbiamo già parlato diffusamente nel saggio *Conoscere è ricordare. Struttura e temi del* Menone *platonico.* Allo stesso modo, abbiamo già trattato del pensiero di uno dei matematici moderni che più si sono affaticati intorno al problema dell'infinito: l'austriaco Bernhard Bolzano, che fu anche illustre pensatore, nell'articolo *Bernhard Bolzano e la rinascita della logica formale come dottrina della scienza.*
Ad ogni modo, la scoperta dell'incommensurabilità del lato di un quadrato e della sua diagonale era destinata a rivoluzionare tutto il pensiero geometrico, a partire dal concetto di punto: che, evidentemente, non poteva più essere concepito come punto-monade occupante una porzione di spazio, ma solo e unicamente come punto ideale, avente bensì una posizione, ma assolutamente privo di estensione e, quindi, di dimensioni.

Scrive ancora Frajese (op. cit., vol. 1, p. 68):
"Mirabile scoperta, s'è detto. E mirabili ne furono le conseguenze, legate alla scoperta così strettamente da costituire, potrebbe dirsi, un tutto unico.
"Si tratta del fatto che quella struttura granulare *della linea, di cui abbiamo già discorso, cioè quella struttura di una linea considerata come somma di un certo numero di punti estesi, assimilabili a granellini, dovette essere abbandonata, dopo quella scoperta, dalla scuola pitagorica. Per vederne le ragioni, pensiamo per un momento al lato e alla diagonale di un quadrato come composti da tanti punti-granellini. Tale punto-granellino (che sarebbe poi il famoso punto-unità dei Pitagorici) verrebbe contenuto esattamente un certo numero di volte nel lato e un certo altro numero di volte nella diagonale: lato e diagonale sarebbero dunque commensurabili: la loro comune misura sarebbe proprio quel punto-granello. Possiamo dire anzi di più: che nella concezione geometrica di un punto avente dimensioni, cioè di un punto piccolo sì, ma di dimensioni finite, non potrebbero in alcun modo esistere linee incommensurabili. Ciò perché, male che andasse, due linee qualunque avrebbero sempre come misura comune un minuscolo segmentino, cioè il punto, che sarebbe ottenuto esattamente tanto nell'una quanto nell'altra.*
*"Un solo rimedio è possibile, di fronte alla sconcertante scoperta di linee incommensurabili: l'*annichilimento *del punto, che viene ridotto ad una entità evanescente, cioè senza dimensioni: privo di lunghezza, privo di larghezza, privo di altezza. Si tratta cioè del famoso* punto geometrico*, che siamo avvezzi a considerare fin dai primi anni di scuola.*
"Sicché una linea, per quanto breve, non contiene già cento, o mille, o diecimila punti, ma ne contiene infiniti. Questo fatto si esprime con una semplice proposizione, che si riassume come postulato sulla struttura della linea geometrica: Tra due punti qualunque di una linea può sempre inserirsi (almeno) un punto intermedio.*"*

Notiamo, tra parentesi, che la concezione del punto come inesteso e privo di lunghezza porta con sé quella di linea come priva di larghezza e anche quella di superficie priva di spessore (sia la linea che la superficie sono formate da una quantità infinita di punti, ciascuno dei quali privo, tuttavia, di estensione).

Ed eccoci tornati al concetto di numeri e di insiemi infiniti, dal quale eravamo partiti.

Un primo paradosso risulta dal fatto che, su ciascuna di due linee di diversa lunghezza, troviamo una quantità infinita di punti; mentre il pensiero intuitivo parrebbe suggerirci che nella linea più lunga dovrebbe essere contenuta una quantità maggiore di punti.

Eppure, è cosa semplicissima "visualizzare" il concetto di punto inesteso, con il semplice aiuto di un foglio di carta, una matita e un righello.

Se tracciamo, ad esempio, su un foglio il segmento **AB**, dobbiamo pensarlo come costituito da infiniti punti; se poi lo suddividiamo, nel punto **C**, in due metà uguali, **AC e CB**, anche ciascuno di questi due nuovi segmenti dobbiamo pensarlo come costituito da infiniti punti; e altrettanto se dividiamo a metà ciascuno dei due segmenti, in altri due segmenti, ottenendo così i quattro segmenti **AD, DC, CE ed EB**: anche ora ciascuno dei quattro segmenti conterrà un numero infinito di punti.

Insomma, un segmento di retta contiene altrettanti punti quanti ne contiene la sua metà, o la

decima o centesima o millesima parte: sempre infiniti.

Conclusione: quando si parla di infinito, dobbiamo trascendere le categorie sensoriali e fare appello unicamente all'intelligibile.

Seconda conseguenza: le figure geometriche "pure" sono enti assolutamente ideali, ed è solo per esigenze pratiche che le rappresentiamo materialmente come se godessero, invece, di proprietà sensibili.

E questo è il primo paradosso.

Il secondo paradosso è che noi non siamo in grado di affermare con sicurezza se esista un qualsiasi insieme infinito nel mondo, nonostante che filosofi e matematici del valore di Bolzano, Cantor e Frege si siano prodigati per tentare di verificarlo.

Scrive ancora Bertrand Russell (op. cit., pp. 86-88):

*"Non si può dire che sia sicuro che esista in realtà un qualsiasi insieme infinito nel mondo. L'ipotesi che esista è quello che noi chiamiamo l'*assioma dell'infinito.

"Sebbene esistano vari modi con i quali si potrebbe sperare di dimostrare questo assioma, c'è ragione di pensare che siano tutti errati, e che non vi siano ragioni logiche conclusive per ritenerlo vero.

"Nello stesso tempo, non esistono ragioni logiche 'contro' gli insiemi infiniti, e siamo pertanto logicamente autorizzati a esaminare l'ipotesi che esistano tali insiemi.

"la forma pratica di questa ipotesi, ai nostri fini presenti, è la affermazione che se n *è un numero induttivo qualsiasi,* n *non è uguale a* n + *1. Se vogliamo identificare questa ipotesi con quella che afferma l'esistenza di insiemi infiniti sorgono differenti sottili difficoltà (…).*

"Per il momento, ci limiteremo ad assumere che, se n *è un numero induttivo,* n *non è uguale ad* n *+ 1.*

"Questo è implicito nella assunzione di Peano che due numeri induttivi non hanno lo stesso successore; infatti, se n = n + *1, allora* n - *1 ed* n *hanno lo stesso successore, cioè* n. *In questo modo, non supponiamo nulla che non sia implicito nelle proposizioni primitive di Peano.*

"Consideriamo ora l'insieme dei numeri induttivi stessi. È una classe perfettamente ben definita. In primo luogo, un numero cardinale è un insieme di classi tutte simili l'una all'altra e che non sono simili a nessun'altra differente da loro.

"Definiamo allora come 'numeri induttivi' quei numeri cardinali che appartengono alla posterità di 0 rispetto alla relazione di n *a* n *+1, cioè quei numeri che godono tutte le proprietà di 0 e dei successori dei possessori di quelle proprietà, indicando come 'successore' di* n *il numero* n + *1.*

"Così la classe dei numeri induttivi è perfettamente definita.

"Per la definizione generale di numero cardinale che abbiamo dato, il numero dei termini nella classe dei numeri induttivi deve essere definito come «tutte quelle classi che sono simili alla classe dei numeri induttivi»; questo insieme di classi, cioè, è *il numero dei numeri induttivi, secondo la nostra definizione.*

"Ora è facile vedere che questo numero non è uno dei numeri induttivi. Se n *fosse un numero induttivo qualsiasi, il numero dei numeri da 0 a* n *(entrambi inclusi) sarebbe* n *+ 1, e pertanto il numero totale dei numeri induttivi sarebbe maggiore di* n*, qualsiasi fosse* n.

"se ordiniamo i numeri induttivi in una serie per ordine di grandezza, questa serie non ha un termine ultimo; ma se n *è un numero induttivo ,ogni serie il cui campo abbia* n *termini, possiede un termine ultimo, il che si dimostra facilmente.*

"Queste differenze potrebbero essere moltiplicate ad libitum. *Quindi il numero dei numeri induttivi è un tipo nuovo di numero, differente da tutti gli altri, e che non possiede tutte le proprietà induttive.*

"Può accadere che 0 abbia una certa proprietà, e che se n *la possiede, la possiede anche* n *+ 1; purtuttavia può succedere che questo numero non possegga questa proprietà di per sé. Le difficoltà che così a lungo hanno ostacolato la teoria dei numeri infiniti sono largamente dovute al fatto che alcune, almeno, delle proprietà induttive sono state erratamente considerate tali da* dover *appartenere a tutti i numeri: si pensava quindi che non potessero essere negate sena contraddizione.*

"Il primo passo verso la comprensione della natura dei numeri infiniti consiste nel comprendere pienamente la erroneità di questo punto di vista. La differenza più notevole eappariscente tra un numero induttivo e questo nuovo tipo di numero consiste nel fatto che questo nuovo numero rimane immutato sommandogli o sottraendogli 1, raddoppiandolo o dimezzandolo o sottoponendolo a ogni altra operazione che si suppone renda necessariamente un numero qualsiasi maggiore o minore."

Appunto: come nel caso del segmento (o dell'insieme) che, dimezzato o raddoppiato, contiene sempre, in ciascuna sua nuova parte, un ugual numero di punti, cioè infiniti.

Pertanto, alla domanda che ci eravamo posta: «se esista, al mondo, qualche cosa di infinito», dobbiamo rispondere che certamente esiste in senso logico-matematico; ma che, in senso fisico e materiale, non posiamo affermarlo né negarlo.

D'altra parte, entrare (o tentar di entrare) nella logica dell'infinito significa scardinare, in buona parte, i nostri abituali paesaggi concettuali. Significa entrare in un mondo dove la parte non è minore del tutto, dove la somma non è maggiore degli addendi; dove, inoltre, i giorni non sono minori dei mesi né gli anni sono maggiori delle ore. Infatti, noi possiamo tranquillamente (cioè, sena contraddizione logica) trasferire tutto quanto abbiamo detto circa il punto geometrico, dal campo dello spazio a quello del tempo; e concepire il tempo medesimo come una somma infinita di punti. Ma è chiaro che, se il punto-istante è un ente inesteso, pur essendo alla base dell'ordine cronologico degli eventi, un minuto contiene tanti istanti, cioè infiniti, quanto un secolo o un millennio; e così via.

Si dirà che, in questo modo, si ricade nei paradossi di Zenone, secondo il quale né la freccia potrà mai colpire il suo bersaglio, né il veloce Achille superare in corsa la tartaruga: paradossi, appunto, basati sulla concezione ideale, e non sensoriale, del tempo. Eppure, i più recenti esiti *sperimentali* della fisica quantistica sembrano condurre appunto in direzione di tali paradossi: basti pensare al principio di indeterminazione di Werner Heisenberg.

Ha scritto in proposito Colin Wilson, nel suo libro *Dei dell'altro universo* (titolo originale *Alien Down*, 1988; traduzione italiana Casale Monferrato, Piemme, 1999, pp. 58-360):

"Esiste un esperimento particolarmente sconcertante, che sottolinea i paradossi da Alice nel paese delle Meraviglie *della fisica quantistica. Se proietto un fascio di luce attraverso una fessura, con uno schermo posto dall'altra parte, esso formerà una sottile linea luminosa su quest'ultimo, corrispondente all'apertura attraverso cui è passato; se pratico un'altra fessura vicino e parallela alla prima, i bordi delle due linee luminose si sovrapporranno sullo schermo. Appariranno tuttavia alcune linee nere nella parte sovrapposta, dovute a interferenza: la cresta di un'onda cancella il solco dell'altra.*

"Supponiamo che solo un fotone per volta passi attraverso le due fessure (ridotte ora a fori di spillo) e che, anziché uno schermo, ci sia una lastra fotografica: dopo un lungo periodo vi aspettereste che apparissero due infinitesimali punti luminosi, ma senza alcuna interferenza, perché un fotone non può interferire con se stesso. Eppure, in quest'esperimento appaiono ugualmente linee dovute a interferenza,

"Ma c'è qualcosa di ancora più strano. Se un contatore di particelle viene collocato sui due fori di

spillo, per scoprire attraverso quale buco passa ciascun fotone, l'effetto interferenza cessa immediatamente, come se il fatto di osservarli influenzasse il comportamento dei fotoni. Come mai? Il fotone si scinde in due? O l'onda si divide e passa attraverso entrambi i fori di spillo? Se è così, perché colpisce lo schermo in un punto ben preciso? E perché se non è osservata si comporta come un'onda, e se osservata come una particella?

Negli anni Cinquanta, Hugh Everett, allievo del fisico John Wheeler, propose una stupefacente interpretazione. Il fatto che il fotone diventi solido solo quando viene 'osservato' suggerisce che, quando non è osservato, assume ancora la forma di 'onda di probabilità' di Bohr, e può perciò attraversare entrambi i fori di spillo contemporaneamente. E le due 'onde di probabilità' interferiscono reciprocamente. È come se il gatto di Schrödinger esistesse contemporaneamente in due universi, morto in uno e vivo nell'altro. Una volta aperta la scatola, le due probabilità si coagulano nel nostro universo materiale, e possiamo trovare il gatto sia morto che vivo.

"Ma perché due universi? Quando un fotone 'fa una scelta' tra onda e particella, in realtà, secondo Everett, non fa una vera scelta: sta infatti scegliendo in entrambi gli universi paralleli. *E dato che un'onda elettronica diventa corpuscolare ogni volta che colpisce una lastra fotografica o un altro elettrone, ciò implica ogni volta un nuovo universo parallelo. Migliaia, milioni, miliardi di universi paralleli. Quest'idea pare uno scherzo. Eppure molti scienziati la prendono sul serio. Ad esempio, un giovane esponente del mondo della fisica quantistica, David Deutsch, nel suo* The Fabric of Reality, *dedica un capitolo alla spiegazione dell'esperimento della doppia distorsione e parla di fotoni solidi e di fotoni 'ombra': i primi esistenti nel nostro universo, i secondi in universi paralleli.*

"Aristotele aveva elaborato il concetto di 'potentia', una sorta di dimensione intermedia tra possibilità e realtà. Pare che gli elettroni si trovino perfettamente a loro agio in questa bizzarra dimensione.

"Lo scopo di questa digressione sugli enigmi e i paradossi della fisica quantistica mira a sottolineare una questione molto importante e cioè che, ci piaccia o no, dobbiamo imparare a guardare alla realtà in modo radicalmente diverso. Come il nostro senso estetico, o quello dell'umorismo, come le nostre preferenze sessuali, la realtà consiste essenzialmente nel modo in cui uno la considera. Potremmo dire, come già altri prima di noi, che il mondo esiste in quanto qualcuno ha coscienza di esso. Il fisico John Wheeler si è spinto ancor più lontano, dilatando il concetto di 'principio antropico' e suggerendo che noi stessi creiamo *il mondo con l'atto di percepirlo."*

Dovremmo, dunque, imparare a guardare alla realtà in modo radicalmente diverso.

I saggi indù e buddhisti e alcuni santi e mistici cristiani lo hanno già fatto, da centinaia o migliaia di anni; i fisici incominciano a farlo solo ora.

Ma è proprio nel cuore del pensiero matematico, contrariamente a quello che la *Vulgata* scientista oggi di gran moda vorrebbe farci credere, che si possono trovare alcuni strumenti di pensiero fondamentali per accostarsi alla realtà con questo sguardo nuovo, con questa inedita consapevolezza.

Come se scoprissimo il cielo, per la prima volta, alto sopra di noi: magnifico, sorprendente, indescrivibile.

2.6 Sui numeri si fonda l'armonia del cosmo

I pitagorici individuarono corrispondenze magico-religiose tra i numeri e i fenomeni della vita: il numero 1 esprime l'intelligenza, immobile e identica a se stessa; il 2 la mobile opinione che oscilla incerta verso direzioni opposte; il 4 o il 9 (il quadrato del primo numero pari e di quello dispari) rappresentano la giustizia; il 5 il matrimonio perché è l'unione del primo pari e del primo dispari; il 7 è il tempo critico (kairòs) dei periodi cruciali della vita umana (parto settimino, cambio dei denti a 7 anni, pubertà a 14, maturità a 21). Il 10 è, infine, il numero perfetto, rappresentato da un triangolo equilatero, su cui i pitagorici erano soliti giurare. Raffigurato come un "numero triangolare", esso rappresenta la mistica decade: formato dai primi quattro numeri contiene egualmente il pari (4 numeri pari: 2,4,6,8) i dispari (4 numeri dispari:3,5,7).

Dieci erano anche le opposizioni fondamentali: limitato/illimitato, dispari/pari, uno/molti, destra/sinistra, maschio/femmina, luce/tenebra, buono/cattivo, mobile/immobile, retta/curva, quadrato/rettangolo. Attraverso questa tavola dei contrari la realtà veniva divisa in due campi opposti. Dalla parte dei dispari (numero limitato, perfetto) stavano le determinazioni positive; da quella del pari (numero illimitato, imperfetto) quelle negative. Da queste opposizioni scaturisce l'armonia esistente tra le cose, legge dell'universo che trova la sua espressione più sublime nella musica, il modello dell'armonia universale.

3. L'incommensurabilità

Con i Pitagorici, l'universo non viene più visto come ricettacolo di forze oscure, ma diventa comprensibile razionalmente. La tradizione attribuisce, tuttavia, ai pitagorici la scoperta dell'incommensurabile: essi avrebbero scoperto l'esistenza di grandezze che non hanno una misura comune e il cui rapporto (per esempio quello tra la diagonale del quadrato e il lato) non può essere espresso da una frazione con numeratore e denominatore interi. Ciò costituiva una "scandalosa eccezione" alla teoria del numero come *arché,* in grado di eliminare la loro dottrina, fondata sulla convinzione che il rapporto tra grandezze potesse sempre essere rappresentato mediante numeri interi. Non a caso, a proposito di queste grandezze, i pitagorici parlarono non solo di "incommensurabile", ma anche di "irrazionale": queste, infatti, sfuggivano al criterio pitagorico di razionalità.

3.1 Crisi degli irrazionali nella scuola pitagorica

I pitagorici avevano come base della loro filosofia i numeri, ad essi risale il concetto di entità matematiche, numeri, figure geometriche come astrazioni. Questa loro concezione tuttavia non era

presente fin dall'inizio: i primi pitagorici avevano concepito, infatti, una **TEORIA MONADICA**, caratterizzata da **NUMERI FIGURATI**, che da una parte conduceva ad una spiegazione quantitativa dell'universo, dall'altra, applicata alla geometria, dava luogo all'aritmogeometria pitagorica. Dai numeri figurati, i pitagorici sono arrivati a trovare la formula delle terne pitagoriche, dall'aritmogeometria, invece, si giunse a postulare le proprietà matematiche dei singoli numeri o classi numeriche.

Le varie scoperte e dimostrazioni fatte, tra cui soprattutto il Teorema di Pitagora, portarono, però, risultati imprevisti e soprattutto indesiderati tra i discepoli e lo stesso Pitagora. Difatti si arrivò a scoprire (due dimostrazioni, una geometrica e una algebrica sono fra le più accreditate) l'esistenza di numeri "particolari", formati da un numero non finito di cifre (e non periodici,
quindi non esprimibili tramite frazioni), i cosiddetti numeri irrazionali. ???
E questo era da loro ritenuto impossibile: infatti, per i pitagorici numero significava solo numero intero; essi erano, quindi, infastiditi dalla scoperta che alcuni rapporti (quello ad esempio di un'ipotenusa e un suo cateto) non fossero esprimibili mediante numeri interi. IL numero, proprio per la sua natura, deve essere reale, e constatare l'esistenza dei numeri irrazionali compromise seriamente la loro filosofia. Il numero irrazionale non è riducibile a frazione, non è quindi "misurabile", e viene così a mancare quel connotato fondamentale che lo rende misura del mondo: era in contraddizione non solo con le convinzioni filosofiche dei pitagorici, ma metteva anche in crisi il concetto stesso di infinito della filosofia greca.
- L'argomento matematico fu ripreso dopo Parmenide da Zenone, in particolare nei suoi paradossi (interessanti quelli della tartaruga e della freccia) -
Non c'è da meravigliarsi della proibizione imposta ai membri della setta di rivelare ad altri queste scoperte considerate blasfeme e sconcertanti, ma secondo una delle ipotesi più accreditate, uno dei discepoli, Ippaso da Metaponto divulgò il segreto. Egli mal tollerava l'autorità di Pitagora e si schierò a capo degli acusmatici, con i ribelli, quando questi cacciarono i pitagorici da Crotone. Le

testimonianze raccontano dello scandalo suscitato dalla divulgazione di questa scoperta. Per il suo tradimento, Ippaso venne messo al bando ignominiosamente dalla scuola dei pitagorici che, si racconta, gli innalzarono un monumento funebre, perché fosse chiaro che per loro era morto. La sua triste morte non impedì che lo scandalo si diffondesse rapidamente tra i cultori della matematica e finisse per scuotere dalle fondamenta l'intera concezione pitagorica.
Si narra anche, ma si tratta non più di credenza inventata, bensì di mitologia, che lo stesso Giove, adirato contro di lui, l'avesse fatto perire in un naufragio. Il filosofo greco Proclo (412 - 485 d. C.), in uno scolio del X libro degli elementi, scrive a questo proposito:
"I pitagorici narrano che il primo divulgatore di questa teoria [degli irrazionali] fu vittima di un naufragio; e parimenti si riferivano alla credenza secondo la quale tutto ciò che è irrazionale, completamente inesprimibile e informe, ama rimanere nascosto; e se qualche anima si rivolge ad un tale aspetto della vita, rendendolo accessibile e manifesto, viene trasportata nel mare delle origini, ed ivi flagellata dalle onde senza pace".
Si può notare come Proclo descriva la teoria degli irrazionali quasi come un timore, una paura per i pitagorici. Questa deriva dal fatto che il numero era la cosa più importante e per questo tutte le proprietà geometriche venivano ridotte a proprietà aritmetiche. Dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili questa riduzione non era sempre possibile. La geometria quindi acquisì una superiorità rispetto all'aritmetica (che prevedeva all'epoca solo l'uso di numeri razionali).
La scoperta delle grandezze incommensurabili mette in crisi il pitagorismo, in quanto ne contraddice l'idea basilare, e pone fine all'illusione della possibilità di risolvere per via aritmetica i problemi geometrici. La geometria avrà in seguito uno sviluppo autonomo.

I pitagorici, come conseguenza della loro scoperta, dovettero ammettere che un segmento e in generale una figura geometrica era costituita da infiniti punti di dimensione nulla, contrariamente a quanto ritenevano, cioè che i punti avessero una dimensione, fossero molto piccoli e tutti uguali, ma non nulli. Nel caso in cui un segmento fosse costituito da un numero finito di punti ne risulterebbe, ad esempio, che il lato del quadrato conterrebbe un numero intero di punti e corrisponderebbe, quindi, ad *a* volte la dimensione di un punto. La diagonale, a sua volta, sarebbe *b* volte la dimensione del punto. Il lato e la diagonale avrebbero quindi un sottomultiplo comune, il punto, e non sarebbero più incommensurabili, come invece era risultato evidente.
E' proprio la loro incommensurabilità a richiedere che un segmento sia costituito da un numero infinito di punti. I greci pensarono di riuscire a superare queste difficoltà passando a un ragionamento geometrico indipendente dall'aritmetica e "interpretando la geometria come studio del continuo e l'aritmetica come studio del discontinuo". Non si ha la certezza che sia stato Pitagora stesso o, com'è più probabile, i pitagorici a scoprire, più tardi, gli incommensurabili e Aristotele accenna a una loro dimostrazione consistente nel provare che, nel caso in cui diagonale e lato di un quadrato fossero stati commensurabili, allora, uno stesso numero avrebbe dovuto essere pari e dispari. Vediamo questa dimostrazione.

Egli produsse un'argomentazione (probabilmente con considerazioni geometriche) dell'irrazionalità della radice quadrata di 2. Secondo la storia Ippaso scoprì i numeri irrazionali mentre provava a rappresentare la radice quadrata di 2 come frazione. Pitagora non era in grado di confutare l'esistenza dei numeri irrazionali con la logica, ma le sue credenze non potevano tollerarne l'esistenza e per questo condannò Ippaso a morire annegato. Si può notare come anche Proclo descriva la teoria degli irrazionali quasi come un timore, una paura per i pitagorici. Questa rafforza il fatto che il numero fosse la cosa più importante e per questo tutte le proprietà geometriche venissero ridotte a proprietà aritmetiche. Dopo la scoperta degli incommensurabili questa riduzione non era sempre possibile. La geometria, quindi, venne ad acquisire una superiorità rispetto all'aritmetica (che prevedeva all'epoca solo l'uso di numeri razionali). Questa posizione primaria si riscontra in Euclide ed in genere in tutto il periodo del più rigoglioso sviluppo della matematica greca.
L'altra dimostrazione pervenutaci è quella di cui ci parla Aristotele e fa riferimento alla distinzione tra numeri pari e numeri dispari. Siano d ed l la diagonale ed il lato di un quadrato e supponiamo che siano commensurabili, ossia che il loro rapporto d/l sia un numero razionale m/n, con m ed n numeri reali privi di fattori comuni.
Per il teorema di Pitagora si ha che $\mathbf{d^2 = l^2+l^2}$ **ossia** $\mathbf{(d/l)^2 = 2}$**, ma** $\mathbf{d/l = m/n}$**, per cui** $\mathbf{(m/n)^2= 2}$,

cioè $m^2 = 2n^2$.
Pertanto m^2 è pari e quindi m è pari. Se poniamo m = 2p si ha che $4p^2 = 2n^2$ da cui otteniamo che anche n dovrebbe essere pari contro l'ipotesi che m ed n non avessero fattori in comune. Ne segue che l'ipotesi della commensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato è falsa.

La tanto discussa diagonale è un segmento ed è lì sotto i nostri occhi ma non esiste un numero né intero né fratto che esprima la sua lunghezza. Ecco dunque la scandalosa scoperta: un problema che non si può risolvere con l'aritmetica, viene subito risolto dalla geometria; la geometria prende il sopravvento.
Il teorema di Pitagora, che doveva rappresentare il vanto della scuola pitagorica, si rivelò, invece, colpevole della crisi del pitagorismo. I pitagorici ritenevano che l'essenza di tutte le cose fosse spiegabile in termini di *arithmos,* cioè di proprietà intrinseche dei numeri interi e dei loro rapporti. Essi credevano che i corpi fossero costituiti di corpuscoli tutti uguali tra loro e disposti in forme geometriche.
Questa convinzione portava a ritenere, in ambito geometrico, che anche i punti avessero un'estensione (sia pure piccolissima). L'atteggiamento dei pitagorici nei confronti del punto è stato all'inizio quello in cui siamo tentati di cadere noi stessi quando ci sembra semplice e naturale immaginare il punto come un minuscolo granello di sabbia. Questa concezione era alla base della geometria dei pitagorici (VI e V sec a.C.). il punto era dotato di estensione e da ciò essi deducevano che un segmento dovesse essere formato da un numero infinito di punti situati uno accanto all'altro. Perciò dire che un segmento era doppio, triplo, di un altro significava dire che il numero dei punto del primo era doppio, triplo, dei punti dell'altro. Due segmenti ammettevano, quindi, sempre un sottomultiplo comune, al limite esso era costituito dal punto.
Si può, quindi, comprendere lo sconvolgimento in cui vennero a trovarsi i pitagorici quando scoprirono che il più brillante dei loro teoremi li conduceva inevitabilmente a contraddire la concezione fondamentale della loro geometria, cioè la concezione granulare del punto.
L'abbandono di questa concezione dà origine al processo che trasformerà la geometria da scienza sperimentale a scienza razionale.
E' da quel momento che le figure sono concepite come "enti ideali", pure immagini della nostra mente.

La stessa dimostrazione si può riportare per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ecc. e sembra che di essa se ne servì, più tardi, un maestro di Platone, Teodoro di Cirene, per dimostrare l'assurdità di supporre razionali tutte le quantità del suddetto tipo fino a $\sqrt{17}$, ovviamente escludendo $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$.

3.2 Cenni di GEOMETRIA

La geometria è, anzitutto, la scienza della *misura;* misura di lunghezze, di aree, di volumi. La prima , e più semplice, misura, è quella di una lunghezza. Poiché la *misura* è un *confronto*, occorrerà sempre misurare una lunghezza rispetto a un'altra lunghezza (e così un'area rispetto ad un'altra, un volume rispetto a un altro). Conviene fissare una volta per tutte una delle due lunghezze, cioè confrontare una lunghezza qualsiasi sempre con una stessa lunghezza fissa. Conviene, insomma, fissare un'unità di misura, un metro. Fintantoché gli scambi e i rapporti culturali tra i vari paesi erano scarsi, in si usavano metri diversi: per es. *pollici, piedi, yarde, miglia* in Inghilterra, *arsicin e verste* in Russia, *cubiti, stadii e miglia* nell'antichità classica, e così via. Con lo sviluppo dei commerci, delle comunicazioni, degli scambi culturali, e per merito soprattutto degli scienziati, sono state fissate nel secolo passato alcune unità di misura internazionali, ed è stato anzi addirittura fondato un Ufficio internazionale dei pesi e delle misure , che ha sede a Parigi. In questo ufficio c'è una *lunghezza-campione.* Quella con la quale e rispetto alla quale si devono misurare tutte le altre: il *metro* per eccellenza, una sbarra di platino che è, all'incirca, la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre. Fissato il metro si determina la misura di una lunghezza (o segmento) con le seguenti operazioni:

1. si fa coincidere l'inizio del metro con l'inizio del segmento; poi si sovrappone il metro al

segmento e si segna il punto del segmento che combacia con la fine del metro; si ricomincia l'operazione a partire da questo nuovo punto, e si ripete fintantoché o la fine del metro combacia con la fine del segmento , oppure il pezzo che avanza è minore del metro. Nel primo caso, se, per esempio, il metro è stato "riportato" esattamente 5 volte e non ci sono "avanzi", si dirà che la misura del segmento è di 5 metri esatti.

Nel secondo caso, supponiamo che invece, dopo aver riportato il metro 5 volte, avanzi un pezzo del segmento più piccolo di un metro: diremo che il segmento è lungo più di 5 metri, ma meno di 6 metri.

Cinque metri è una sua misura *approssimata per difetto*, 6 metri una *misura approssimata per eccesso*: l'approssimazione è fatta "a meno di un metro".

2. Se c'è avanzo, minore di un metro, lo si misura con la decima parte del metro: il *decimetro*. Se il tratto avanzato può essere misurato esattamente col decimetro, abbiamo finito, perché abbiamo trovato la misura esatta in metri e decimetri. Per esempio, nel nostro caso, se l'avanzo è ricoperto esattamente da 4 decimetri uno dopo l'altro, la misura esatta dell'intero segmento sarà 5 metri e 4 decimetri; 5,4 metri. Se invece c'è ancora un avanzo, questa volta più piccolo di un decimetro, in metri e decimetri avremo solo una misura approssimata; per es. *più* di 5,4 metri, *meno* di 5,5. Allora cerchiamo di ricoprire esattamente il nuovo avanzo con un certo numeri di *centimetri*, cioè di decimi di decimetro: se riusciamo, abbiamo finito, altrimenti ci sarà un nuovo avanzo, che cercheremo di ricoprire esattamente con un certo numero di decimi di centimetro, cioè di millimetri…

E così via, finché…

Fino a che cosa? In pratica fino a che l'avanzo è trascurabile rispetto allo scopo che ci proponiamo con la misura. Se si deve misurare una lunga strada rettilinea, già i decimetri sono trascurabili; se misuriamo una statura, in generale trascuriamo i millimetri; l'operaio che deve costruire ingranaggi e congegni molto precisi, dovrà essere esatto fino al decimo di millimetro; lo scienziato in laboratorio non potrà trascurare neppure i *micron*, i millesimi di millimetro. Tutti però agrimensori e operai, tecnici e scienziati, a un certo momento si fermano, si accontentano di un'approssimazione. Tutti, tranne il matematico. Al matematico non interessa il risultato praticamente utile ma il procedimento della misura. Il matematico si chiede: "questo procedimento deve arrestarsi a un certo momento? Si deve poter arrivare in ogni caso a una misura esatta, sia pure con milioni di cifre decimali? O invece vi sono dei casi dove l'avanzo, sempre più piccolo, continua a esserci fino all'infinito?"

I matematici hanno trovato una risposta al loro problema. La risposta può destare un certo stupore: esistono delle lunghezze che non possono essere misurate con esattezza da un dato metro, neppure ricorrendo a miliardesimi di miliardesimi di metro, o a parti di metro ancora più vertiginosamente piccole. Occorre allora introdurre una grande divisione in due categorie della lunghezza rispetto a un dato metro:

1a categoria. Lunghezze (segmenti) che possono essere misurate esattamente, sia pure ricorrendo ai decimi, centesimi, millesimi e ai successivi "sottomultipli" decimali del metro stesso. I segmenti di questa prima categoria si chiamano *commensurabili* col metro: la loro misura è un numero decimale che può sempre essere ridotto a una frazione, cioè un *numero razionale*, anche se eventualmente è *periodico* (dicesi così un numero decimale con infinite cifre che, a cominciare da un determinato punto, si ripetono a gruppi eguali fra loro). Insomma, se avendo diviso il metro in un certo numero, *n*, di parti, il segmento contiene *m* di queste parti, allora la sua misura rispetto al metro, cioè il *rapporto* del segmento al metro, è la frazione ***m/n*.**

2a categoria. Lunghezze (segmenti) per le quali ci si deve necessariamente accontentare di una misura approssimata rispetto al metro. I segmenti di questa seconda categoria si dicono *incommensurabili* col metro. La loro misura conduce a una successione senza fine (e non periodica) di cifre decimali; è, se vogliamo, un numero con infinite cifre decimali e non periodico, un *numero irrazionale.*

Questi risultati profondi sono dovuti al pensiero degli antichi greci. Si fa risalire a Pitagora la prima dimostrazione della incommensurabilità di due segmenti, cioè la dimostrazione del fatto che in un quadrato la diagonale non può essere misurata esattamente (con una frazione) prendendo come metro il lato. La dimostrazione può essere compresa da un ragazzo intelligente; tuttavia, per non interrompere il discorso, la mettiamo a parte. Una teoria completa e rigorosa dei rapporti tra segmenti e opera e gloria di Euclide e del suo geniale predecessore Eudosso.

I greci volevano che, in geometria, si usasse nessuna parola non ben definita, e perciò non ammettevano che si introducesse nei ragionamenti una cosa così vaga e indeterminata quale l'infinito: l'infinitamente grande l'infinitamente piccolo.
Prendiamo in esempio la frase "infiniti lati infinitamente piccoli", riferendosi alla circonferenza di un cerchio: si tratta di una frase che suona bene, ma quale significato ha? Appunto perché la geometria ellenica era molto sviluppata e perfezionata, non poteva essere accettata dalla Grecia in questa forma tanto poco precisa, tanto immaginosa.
Come sempre, le posizioni mentali troppo rigide non sono mai del tutto giuste, sono poco feconde. I greci (anzi, come vedremo, quei greci) che non volevano si ragionasse con l'infinito, avevano molte buone ragioni dalla loro parte; ma, in realtà, il merito di uno dei più grandi progressi della matematica, e quindi del pensiero umano, va a quegli altri greci, agli studiosi medievali, ed agli scienziati del Rinascimento che ebbero il coraggio di lavorare con un numero infinito di grandezze infinitamente piccole.

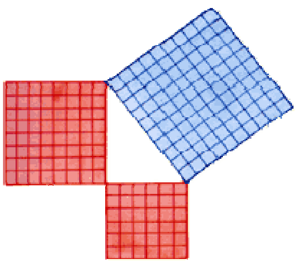
I geometri greci portarono ad un altissimo grado di perfezione, tecnica e logica, lo studio delle proporzioni tra le grandezze, in particolare il confronto tra le figure *simili*. Essi basarono su tale studio il calcolo non solo di lunghezze incognite (come l'altezza della piramide di Cheope) ma anche delle aree di molte figure piane limitate da rette, o dei volumi di solidi limitati da piani. Per confrontare le aree di due figure piane simili (cioè della stessa forma) occorre confrontare non più i lati corrispondenti, ma i *quadrati* dei lati corrispondenti. Un semplicissimo esempio ve ne convincerà. Supponiamo che la scala di una *carta topografica* sia tale che in essa alla lunghezza di un centimetro corrisponda la distanza reali di un chilometro.
Prendiamo sulla carta due quadratini: quello che ha il lato lungo un centimetro. Essi sono simili, perché hanno gli angoli uguali (quattro angoli retti: tutti i quadrati sono simili tra loro), e il *rapporto* dei lati è di uno a due, cioè ogni lato del secondo è il doppio del corrispondente lato del primo. Ma il secondo quadrato si può decomporre non già in due quadrati uguali al primo, bensì in quattro, perciò rappresenterà sulla carta una regione che ha l'area non di due, ma di quattro chilometri quadrati.
Così, se il lato del secondo fosse stato tre volte quello del primo, l'area del secondo sarebbe stata nove volte l'area del primo. Ma nove è il quadrato di tre, così come quattro è il quadrato di due: in generale, il *rapporto delle aree di due quadrati* è il *quadrato del rapporto dei lati*. La stessa regola vale per rettangoli simili e allora anche per triangoli simili (rettangoli, o no). Già: infatti se ho due triangoli (rettangoli) simili e li raddoppio ottengo due rettangoli simili: e allora il loro rapporto sarà uguale a quello dei corrispondenti rettangoli simili. (ma la cosa è vera anche per triangoli simili *qualunque*). La teoria della similitudine –lo ripetiamo- fu costruita dai greci tanto perfettamente che ancora oggi la si studia nella scuola media più o meno come la studiavano i ragazzi di Atene o Alessandria d'Egitto sugli *Elementi* di Euclide, duemila e trecento anni fa. Io sono d'accordo però con gli studiosi che pensano che il calcolo delle aree in un primo momento, i greci lo abbiano fatto per una via più semplice e naturale di quella basata sul confronto di figure simili, e , in generale, sulle proporzioni. Prendiamo un esempio famoso; quello di Pitagora e del suo teorema: "in un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti." (l'ipotenusa è il lato più lungo, quello opposto all'angolo retto; i cateti sono i lati minori, "adiacenti" –cioè vicini- all'angolo retto). La leggenda dice che Pitagora comprese tanto bene l'importanza della sua dimostrazione, da ordinare una ecatombe, cioè il sacrificio di cento buoi agli dèi, in segno di ringraziamento e di gioia. Naturalmente, sulla scoperta di Pitagora non abbiamo né giornali, né libri, né riviste. Abbiamo solo leggende o meglio storie raccontate da scrittori vissuti secoli e secoli dopo.
Tuttavia, molte ragioni ci inducono a credere alla "storia di Pitagora". Forse non si sarà chiamato Pitagora, forse non avrà ucciso cento buoi ma uno solo, o forse non avrà sacrificato neanche un agnellino: tutto questo può essere leggenda. Ma che uno studioso della Magna Grecia (con questa espressione si indicavano l'Italia Meridionale e la Sicilia), vissuto seicento anni prima di Cristo, abbia dimostrato, con un ragionamento generale, la relazione che chiamiamo di Pitagora tra i

quadrati dei cateti e quello dell'ipotenusa, per ogni possibile triangolo rettangolo, questa crediamo sia storia, cioè verità. Sappiamo con certezza che, già molti e molti secoli prima di Pitagora, in Egitto, in Caldea, erano ben noti esempi di triangoli rettangoli sui quali si poteva controllare praticamente la verità della relazione detta più sopra.

Sappiamo, inoltre, che al tempo di pitagora, nelle isole greche e nella Magna Grecia, la geometria si trasforma da raccolta di regole pratiche e di osservazioni staccate, come quella che ora abbiamo ricordato, in scienza razionale, cioè in ragionamenti generali sulle figure in generale.
Dunque pitagora –ecatombe o non ecatombe- dimostrò veramente circa 600 anni prima di cristo che "la somma dei quadrati dei due cateti, in un triangolo rettangolo, è sempre uguale, o meglio *equivalente*, al quadrato dell'ipotenusa". Ma, pur convinti che l'abbia dimostrato, ci chiediamo: come l'avrà dimostrato?

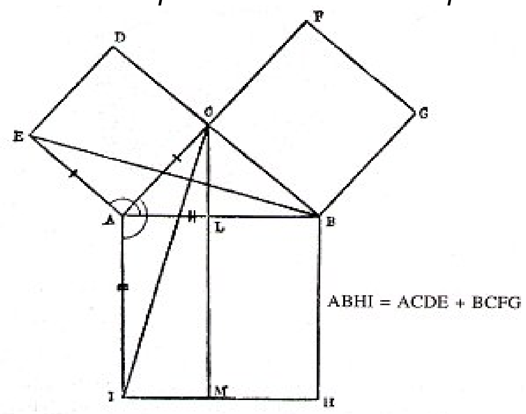
Per esempio, se i due cateti sono di lunghezza 3 e 4 (metri o centimetri ecc., quello che si voglia assumere come unità di misura) si verifica con l'esperienza che allora l'ipotenusa è di lunghezza 5 (rispetto alla stessa unità di misura). Si controlla poi che il quadrato di 3 + il quadrato di 4 è uguale al quadrato di 5, vale a dire: $\mathbf{3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2}$. Sappiamo inoltre che al tempo di Pitagora, nelle isole greche e nella Magna Grecia, la geometria si trasforma da raccolta di regole pratiche e di osservazioni staccate, come quella che ora abbiamo ricordato, in scienza razionale, cioè in ragionamenti generali sulle figure in generale (non più su quel triangolo rettangolo di lati 3,4,5 o su quell'altro, ma su tutti i triangoli rettangoli).

3.3 IL TEOREMA DI PITAGORA



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\Downarrow$$
$$c = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

In ogni triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

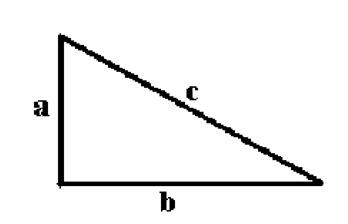


Il teorema di Pitagora portò i pitagorici alla scoperta degli incommensurabili. Se in un quadrato si applica il teorema al triangolo rettangolo isoscele formato dai suoi lati e dalla diagonale si scopre che la diagonale del quadrato e il suo lato sono incommensurabili, ossia che diagonale e lato non hanno alcun sottomultiplo comune

La dimostrazione

Il primo enunciato preciso, e la prima dimostrazione inequivocabile del nostro teorema si trovano nel primo libro degli *Elementi* di Euclide e ne costituiscono il filo conduttore (circa 300 a. C):
Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale ai quadrati dei lati che contengono l'angolo retto. Oggi in genere il "lato opposto all'angolo retto" si chiama *ipotenusa*, mentre i "lati che contengono l'angolo retto" prendono il nome di *cateti*. Inoltre, invece di "uguale" si preferisce dire *equivalente*, o che ha la stessa area. Così una formulazione moderna può essere:
Nei triangoli rettangoli, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. o anche, dato che l'area del quadrato è uguale al quadrato del lato, *Nei triangoli rettangoli, il quadrato dell'ipotenusa è equivalente ai quadrati dei cateti.*Se si indicano questi ultimi con *a* e *b*, e l'ipotenusa con *c*, il teorema prende la forma algebrica:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$



Dato un triangolo rettangolo di lati a, b e c, ed indicando con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

o, in alternativa, risolvendolo per *c*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti:

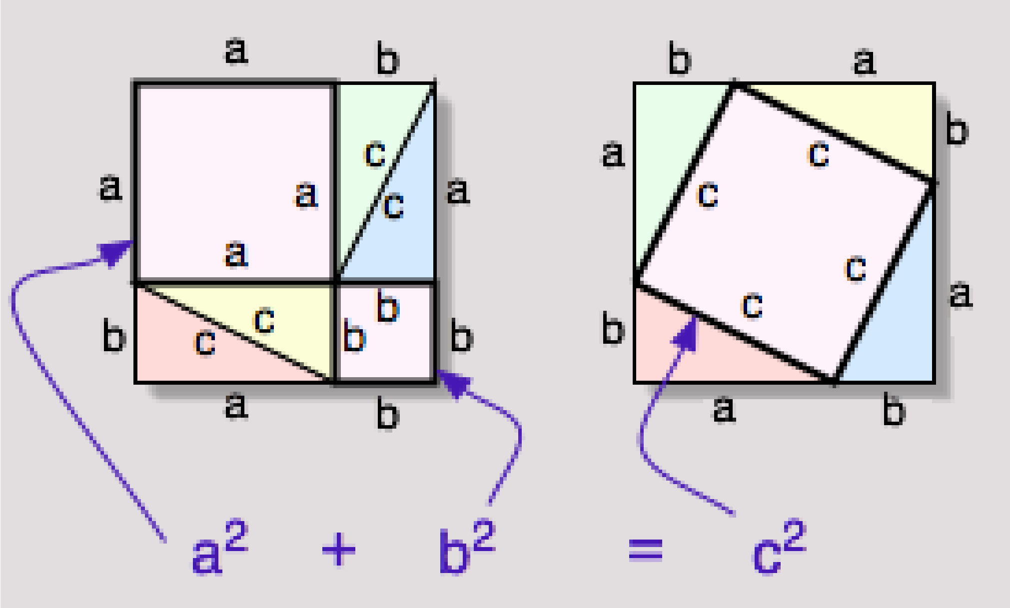
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Il modo di enunciare il teorema ci permette di ricavare le formule esplicative:

$i^2 = C^2 + c^2$ da cui: $C^2 = i^2 - c^2$ e: $c^2 = i^2 - C^2$

Sono queste le tre formule che ci permettono di utilizzare il Teorema di Pitagora in un qualsiasi triangolo rettangolo. Da esse, infatti, conoscendo la misura di due lati si può trovare la misura del terzo lato estraendo la radice quadrata da ciascun membro delle tre uguaglianze:

La dimostrazione del teorema di Pitagora più immediata e più diffusa nei libri scolastici consiste nel riempire uno stesso quadrato di lato uguale alla somma dei cateti prima con quattro copie del triangolo rettangolo più il quadrato costruito sull'ipotenusa e poi con quattro copie del triangolo rettangolo più i quadrati costruiti sui cateti, come in figura.



Essendo il teorema uno dei più noti della storia della matematica, ne esistono molte altre dimostrazioni, opera di astronomi, agenti di cambio, e anche una di Leonardo da Vinci (dimostrazione di Henry Perigal, di George Airy in forma poetica, ecc.). Probabilmente, insieme alla reciprocità quadratica, si contende la palma del teorema con più dimostrazioni in assoluto..

Il lavoro svolto parte proprio dalla rappresentazione di un passo tratto dal testo greco: il “Menone” di Platone (Atene, 428-347 a.C.), particolarmente significativo se rielaborato, in maniera adeguata, utilizzando la rappresentanze grafico-geometrica.

3.4 La duplicazione del quadrato

Menone 84 A-C, 84 D-E, 85 B-D. Terzo momento dell’esperimento maieutico.
Socrate[si rivolge a Menone] – Osserva, ora, da questo dubbio come scoprirà la verità, ricercando insieme a me, mentre io non farò altro che interrogarlo, senza insegnargli. E fa’ bene attenzione che tu non mi colga ad insegnargli o a spiegargli, e non solo ad interrogarlo intorno alle sue convinzioni.

Socrate – Dimmi, dunque: non è di quattro piedi questa superficie (abcd)? Comprendi?

Ragazzo – Sì.

Socrate – Potremmo aggiungere ad essa quest’altra eguale (befc)?

Ragazzo – Sì.

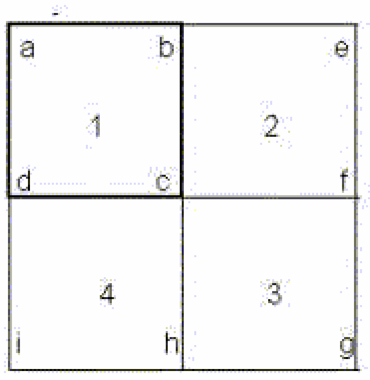
Socrate – E quest’altra terza, uguale a ciascuna di queste (cfgh)?

Ragazzo – Sì.

Socrate – E non potremmo anche completare la figura in questo angolo (dchi)?

Ragazzo – Certamente.

Socrate – E non risulteranno queste quattro superfici eguali?



Ragazzo – Sì-

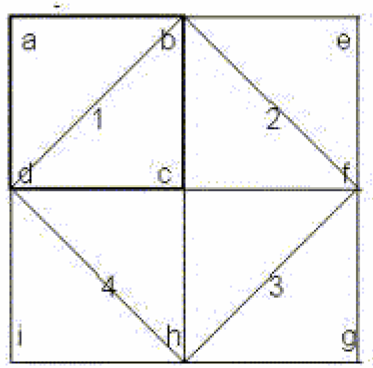
Socrate – E, allora, tutto questo intero (aegi), quante volte diventa più grande di questo (abcd)?

Ragazzo – Quattro volte.

Socrate – Per noi, invece, doveva essere il doppio; o non ricordi?
Ragazzo – Certamente.

Socrate – E questa linea tracciata da un angolo all'altro (bd, bf, fh, hd), non viene forse a dividere a metà ciascuna di queste superfici?

Ragazzo – Sì.



Socrate – Non si ottengono, dunque, queste quattro linee uguali racchiudenti quest'area qui (bfhd)?

Ragazzo – Sì, si ottengono.

Socrate – Considera allora: quanto grande è questa superficie (bfhd)?

Ragazzo – Non lo so.

Socrate – Di questi quadrati, che sono quattro, ciascuna linea non ha tagliato internamente la metà di ciascuno ? O no?

Ragazzo – Sì.

Socrate – E quante ve ne sono di queste metà in questa figura (bfhd)?

Ragazzo – Quattro.

Socrate – E quante in quest'altra (abcd)?

Ragazzo – Due.

Socrate – E il quattro che cos'è rispetto al due?

Ragazzo – Il doppio.

Socrate – Questa superficie, dunque, di quanti piedi diventa?

Ragazzo – Di otto piedi.

Socrate – Da quale linea?

Ragazzo – Da questa (db).

Socrate – Da quella che abbiamo tracciata da un angolo all'altro del quadrato di otto piedi?

Ragazzo – Sì.

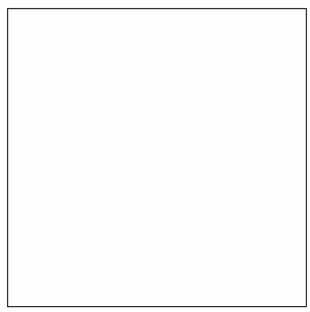
Socrate – Coloro che se ne intendono chiamano questa linea diagonale; sicché, se essa ha nome diagonale, allora dalla diagonale, come tu dici, o ragazzo di Menone, si può ottenere l'area doppia.

Ragazzo – Certamente, o Socrate.

(dal Menone di Platone – A cura di Giovanni Reale, Rusconi Editore, 1999).

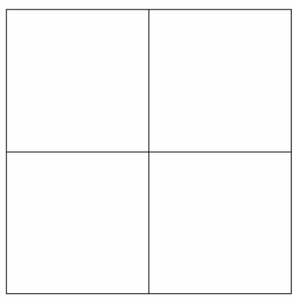
Alla scoperta degli irrazionali:
a scuola da "Socrate".
Partiamo dalla seguente richiesta fatta dall'insegnate:
dato un quadrato di lato unitario si deve costruire un altro quadrato di area doppia.
Costruito il quadrato di lato unitario, alla richiesta di costruirne un altro con area doppia, la maggior parte della classe, quasi all'unisono, ha riposto che il lato del nuovo quadrato doveva misurare $\sqrt{2}$. Si è intuito che la risposta al quesito era stata data algebricamente.

$\boldsymbol{l_1 = 1}$ $\Rightarrow$ $A_1 = 1$ $\Rightarrow$ $A_2 = 2A_1$ $\Rightarrow$ $A_2 = 2$ $\Rightarrow$ $l_2^2 = 2$ $\Rightarrow$ $l_2 = \sqrt{2}$

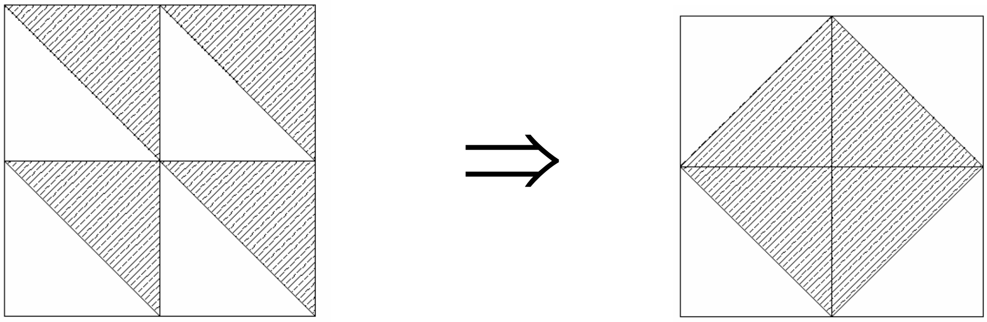


$l = 1$

Geometricamente, seguendo il procedimento socratico, si è allora costruito un quadrato di lato doppio rispetto al primo, si è chiesto quanto fosse l'area di questo nuovo quadrato: 4 volte quella del quadrato iniziale (facendo notare anche che il nuovo quadrato era formato da 4 quadratini iniziali). E rispetto al quadrato che si vuole costruire 2 volte più grande.



Si capisce che è insufficiente considerare metà di ognuno dei 4 quadratini.
Si è quindi diviso ogni quadratino unitario lungo una diagonale e si è fatto notare che tutti gli 8 triangoli rettangoli che si vengono a costruire sono tra loro uguali e che quindi, si poteva arrivare ad ottenere un quadrato di lato uguale alla diagonale del quadratini di partenza.



E tale diagonale, utilizzando Pitagora non è altro che $\sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$!
Quindi, si può costruire un quadrato di area doppia rispetto a quella di un quadrato di lato unitario prendendo come quadrato quello costruito sulla diagonale del quadrato di lato unitario. E il numero che passiamo associare al lato di questo quadrato è, come abbiamo visto, per il teorema di Pitagora quel numero che moltiplicato per se stesso dà 2. certamente non può trattarsi di un numero naturale perché $\mathbf{1^2 = 1}$ **e** $\mathbf{2^2 = 4}$; sarà, perciò un numero compreso tra 1e 2. Sappiamo che tra 1 e 2 sono compresi infiniti numeri razionali: allora dobbiamo procedere per approssimazione del valore creato che corrisponde a $\sqrt{2}$.
Infatti, se non si può trovare alcun numero razionale il cui quadrato sia esattamente 2 possiamo, però, trovare dei numeri razionali (dei numeri decimali per la precisione) il cui quadrato sia molto vicino a 2.

3.5 ACHILLE E LA TARTARUGA

In molti problemi matematici, accade che il calcolo si possa spingere ad una precisione elevata: in altre parole, si può ottenere che l'intervallo di approssimazione sia più piccolo di una piccola quantità prestabilita.

Per il nostro scopo, usiamo il classico esempio di Achille e la Tartaruga, i protagonisti di quello che forse è il più famoso tra i paradossi matematici, trattato da Zenone di Elea, vissuto nel 500 a.C. . Supponiamo che si svolga una singolare gara di corsa fra Achille il pié veloce ed una tartaruga. Sicuro di vincere, Achille concede alla tartaruga 1 metro di vantaggio. La sfida è impari: la velocità della tartaruga è di 1m/s, mentre quella di Achille è di 10 m/s.

Achille: A____

Tartaruga: ________T______________________________________

Dopo un certo tempo, Achille arriva dove era la tartaruga alla partenza (T1), che nel frattempo ha compiuto un pezzo di strada e si trova nel punto T2.

Achille: ________A______________________________________

Tartaruga: _____________T__________________________________

Occorre un ulteriore tempo per giungere in T2, ma bisogna notare che nel frattempo la tartaruga è giunta nel punto T3… e così via.

Achille: ______________A___________________________________

Tartaruga: ___________________T______________________________

Zenone dice che il più lento non sarà mai raggiunto nella corsa dal più veloce. Infatti è necessario che chi insegue giunga prima al punto da cui è partito chi fugge, in modo che il più lento sia necessariamente un po' più avanti del più veloce.

Ed ha ragione: quando Achille raggiunge il punto in cui stava la tartaruga, questa è avanzata e la distanza tra lui e la tartaruga non arriverà mai ad essere pari a zero, pur riducendosi verso l'infinitamente piccolo

Quindi per raggiungere la tartaruga Achille impiega un tempo

$$T = t1 + t2 + t3 + \ldots + tn + \ldots$$

e quindi non la raggiungerà mai.
Ma è altrettanto vero che una somma di infiniti addendi non nulli (come quella riportata sopra e successivamente trasformata in un'operazione numerica) può anche dare un totale finito, che, in questo caso, sarebbe poco più di un secondo.

Infatti se indichiamo con t (espresso in secondi) il tempo necessario a raggiungere la tartaruga, lo spazio percorso da Achille è dato da 10 t, e deve risultare uguale alla somma del vantaggio iniziale della tartaruga con lo spazio percorso.

$10\,t = 1 + t$
$10\,t - t = 1$
$9\,t = 1$
$t = 1/9$

In questo modo, abbiamo facilmente risolto il paradosso proposto da Zenone !

Infatti il cosiddetto "errore" di Zenone è quello di pensare al movimento come una successione di scatti successivi e quindi a una somma di infinite parti che necessariamente porta all'infinito.

3.6 LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI RAZIONALI.: LE SCATOLE CINESI

Fin dalle scuole elementari abbiamo imparato la divisione con resto di un intero (dividendo) per un altro intero (divisore). Possiamo esprimere in modo preciso il significato di questa operazione per mezzo del seguente enunciato:

Dati due interi **a, b (b>0)** esiste un'unica coppia di interi **q, r** (detti quoziente e resto, rispettivamente) tali che si abbia **a = bq + r essendo 0 <r<b**.

L'enunciato è intuitivamente chiaro, se si pensa che *q* esprime il massimo di volte in cui *b* è contenuto in *a*; perciò il resto è inferiore a *b*. Il resto *r* è nullo quando *a* è multiplo di *b*. La divisione con resto si applica spesso al problema di approssimare una qualsiasi frazione con un numero decimale. Anzi, nell'insegnamento elementare la divisione con resto si applica quasi esclusivamente in questa circostanza.

I numeri decimali, come sappiamo bene, sono frazioni aventi per denominatore una potenza di 10; ad esempio:

15/100 = 0,15; 375/1000 = 0,375;   - 243/10 = -(24,3); ……

Dunque un numero decimale è un numero del tipo a/10m, dove *a* è un intero relativo ed *m* è un intero positivo.
Una frazione ridotta ai minimi termini si può trasformare in numero decimale solo quando moltiplicando il denominatore per un intero lo si può trasformare in una potenza di 10; questo accade, evidentemente quando il denominatore contiene solo i fattori primi 2 e 5.
Quando vi sia anche un solo fattore diverso da 2 e 5, la cosa non è possibile.
Quando una frazione p/q non è trasformabile in un numero decimale, e possibile approssimarla mediante un numero decimale, a meno di un decimo, di un centesimo, di un millesimo, ………..

Vogliamo ad esempio, approssimare la frazione 3/7 a meno di 1/10. Scriviamo:

$3/7 = 1/10 \cdot 30/7 = 1/10 \cdot (7{\cdot}4 + 2) /7 = 1/10\ (4 + 2/7) = 0{,}4 + 1/10 \cdot 2/7$

In sostanza abbiamo trasformato le tre unità in 30 decimi (come se avessimo assunto il decimo come nuova unità) e abbiamo eseguito la divisione di 30 per 7: il quoziente è 4 ed il resto è 2.
Adesso, per avere l'approssimazione di 1/100 basta compiere un'analoga operazione sulla frazione 2/7.

$3/7 = 0{,}4 + 1/100{\cdot}20/7 = 0{,}4 + 1/10\ [(7{\cdot}2 + 6/7)] = 0{,}4 + 1/100\ (2+ 6/7) = 0{,}42 +1/100$

a queste operazioni si dà solitamente il ben noto assetto grafico

```
30
   20                    7      .
  60                 0,4285714
    40
      50
        10
          30
```

Nelle divisione con resto che noi eseguiamo via via, i resti possibili sono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6: infatti i resti sono sempre minori del divisore, che è 7, e non possono essere 0 perché la frazione non è equivalente ad un numero decimale.

Quindi, ci possono essere al più 6 resti diversi; proseguendo, ci deve essere un resto che si ripete e, da quel punto in poi tutti i resti si devono ripetere ciclicamente.
Questa constatazione ha carattere generale:
Se p/q è la frazione che si vuole approssimare, vi saranno al più, q-1 resti diversi e quindi, ad un certo punto, si dovranno avere delle ripetizioni.

Gli allineamenti decimali che forniscono la migliore approssimazione per difetto di un numero razionale a meno di 1/10, 1/100, 1/1000, …. sono dunque, da un certo punto in poi, periodici, cioè constano di un gruppo di cifre che si ripete ciclicamente. Tornando al nostro esempio, il numero 3/7 è sicuramente compreso tra 0 e 1 e i numeri 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; …. sono i valori decimali con una, due, tre, …. cifre dopo la virgola, che meglio approssimano per difetto il numero razionale 3/7.

Si deduce allora che i valori 0,5; 0,43; 0,429; 0,4286; …. sono i numeri decimali, con una, due, tre, cifre dopo la virgola, che meglio approssimano per eccesso il numero razionale 3/7.
Abbiamo dunque la successione di intervalli:
[0; 1] [0,4; 0,5] [0,42; 0,43] [0,428; 0,429] [0,4285; 0,4286] …
di ampiezza 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000,..Essi hanno queste due proprietà:
1   ciascuno è contenuto nel precedente

2 le ampiezze degli intervalli diventano piccole quanto si vuole.
Chiameremo scatola cinese una successione di intervalli che godono della proprietà 1 e 2.

Approssimiamo ora con numeri decimali la frazione 1/9. Si ha:

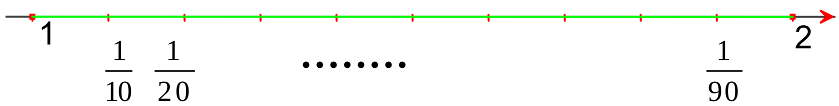
10 | 9 .
10 | 0,111
10
1

I numeri 0; 0,1; 0,11; 0,111;…ci forniscono i valori approssimati per difetto a meno di 1, 1/10, 1/100, 1/1000,…Se aumentiamo di un'unità l'ultima cifra si ottengono i corrispettivi valori per eccesso: 1; 0,12; 0,112; 0,1112;…
Gli intervalli:
[0; 1] [0,1; 0,2] [0,11; 0,12] [0,111; 0,112] [0,1111; 0,1112]…
forniscono dunque una scatola cinese che racchiude il numero 1/9. Questa scatola cinese contiene la successione dei tempi corrispondenti alle varie posizioni di Achille

Proprietà di completezza: ogni scatola cinese di numeri reali racchiude uno ed un solo numero reale.

Quando si parla della incommensurabilità delle diagonali del quadrato con il suo lato è necessario riproporre il discorso delle scatole cinesi, ossia, trovare il numero che elevato al quadrato dia **2.** Quindi sfruttando le approssimazioni per eccesso e per difetto, si individua l'intervallo chiuso [1, 2] di estremi pari all'approssimazione per difetto (1 =1) e per eccesso (2 = 4) del numero **x**, tale che **x = 2.**

Costruendo le scatole cinesi, si divide l'intervallo [1, 2] in 10 parti:



e si cerca tra questo nuovo intervallo se esistono dei numeri che verificano le condizioni **x = 2**. Si individua così un nuovo intervallo di estremi **[1,4- 1,5]** di cui 1,4 è l'approssimazione per difetto e 1,5 quella per eccesso. Successivamente si dividerà l'intervallo **[1,4- 1,5]** in altre 10 parti e si procede analogamente e via via.

Si può ripetere l'operazione all'infinito e non si riuscirebbe a trarne alcun numero razionale che verifichi che **x =2.** Il numero non c'è perché non è da ricercare tra i razionali; il numero che soddisfa le proprietà è un nuovo numero, che appartiene ad un nuovo insieme numerico: quello degli irrazionali. Più precisamente il numero **√2** è quel numero cercato $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Per apprezzare la novità di questa affermazione, occorre ricordare che la proprietà di completezza non vale nell'ambito dei numeri razionali: una scatola cinese di numeri razionali può non racchiudere alcun numero razionale, come abbiamo constatato a proposito della incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato. Anzi, le scatole cinesi di numeri razionali ci sono servite proprio per definire nuovi numeri. Niente di simile accade partendo dai numeri reali: le scatole cinesi di numeri reali racchiudono sempre numeri reali, e non numeri di nuovo tipo.

Ecco perché la nostra proprietà si dice di completezza.
Come si dimostra la proprietà di completezza ? Ne daremo un'idea sostanziale, senza entrare nei dettagli dell'esposizione. Sia **[αn; βn]** una scatola cinese di numeri reali. Se teniamo presente che **αn e βn**, come numeri reali, sono rappresentati ciascuno da scatole cinesi di numeri razionali, possiamo immaginare **αn** e **βn**, approssimati per eccesso e per difetto da nugoli di numeri razionali. Ebbene possiamo prendere un numero razionale **an**, che approssima per difetto αn molto da vicino, ed un numero razionale **bn**, che approssima per eccesso βn molto da vicino.

Se la scelta di **an** e **bn** è fatta con giudizio, si ottiene una scatola cinese [**an, bn**] di intervalli razionali. Questa definisce un numero reale γ**:** si intuisce che è proprio γ ad essere racchiuso nella scatola cinese **[αn;βn].**
Nel proseguimento dei nostri studi di matematica avremo occasione di vedere importantissime conseguenze di questa proprietà di completezza.
A conclusione di questo capitolo, vogliamo esporre alcune nozioni relative alla radice quadrata, di cui ci serviremo immediatamente.
E' facile dimostrare, nello stesso modo con cui abbiamo proceduto per definire **√2 e √3** che, dato un numero reale **a >0**, esiste uno ed un solo numero reale **x>0** tale che **x^2=a**. questo numero si indica col simbolo **√a.**

Insistiamo sul fatto che il simbolo **√a** indica il numero reale non negativo **x** tale che **x^2 = a.** E' errato, ad esempio, scrivere **√4 = -2,** almeno se si intende che sia anche **√4=2**; infatti per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, ne deriverebbe che **2 = -2.**
Analogamente, per ogni numero intero positivo n, si ha che, dato un numero reale **a>0**, esiste uno ed un solo numero reale **x>0** tale che **x^n = a**; tale numero si indica con il simbolo **√a** e si legge radice n-esima di a; (a si chiama radicando e n indice della radice). Osserviamo che per **n = 1** la radice coincide con il radicando: **√a = a**

3.7 CONCLUSIONE

Se un numero razionale x è tale che $x^2 < 2$, lo potremo considerare un valore per difetto; se è tale che $x^2 > 2$, lo dovremo considerare un valore approssimato per eccesso. Dunque **1** è certamente un valore per difetto e **2** un valore per eccesso. Dividere l'intervallo di estremi **1 e 2** in dieci intervalli uguali per ognuno di questi nuovi valori decimali trovati verificare che il quadrato sia minore o maggiore di **2.**
Continuando secondo questo procedimento abbiamo notato che l'intervallo in cui creare $\sqrt{2}$ si restringe sempre di più, ma $\sqrt{2}$ non si trova, ossia non si trova tra i razionali un numero tale che il quadrato sia esattamente due. A questo punto, abbiamo dimostrato che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2. Ma allora questo numero $\sqrt{2}$ non esiste? In realtà quel numero il cui quadrato sia 2 esiste ma non deve essere cercato tra i razionali; questo nuovo numero fa parte di un nuovo insieme di numeri quali gli irrazionali.
Non avremmo mai trovato il numero decimale preciso che equivale a $\sqrt{2}$, neanche se fossimo andati avanti all'infinito.
Ecco ora una dimostrazione: *la dimostrazione per assurdo*

Dobbiamo dimostrare che $\sqrt{2}$ non è razionale.

Visto che abbiamo deciso di procedere per assurdo, supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale, ovvero sia possibile scriverlo sotto forma $\frac{m}{n}$ (con *m* ed *n* numeri primi fra loro), ulteriormente irriducibile.

Scriviamo quindi $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ della quale $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ che possiamo scrivere anche $m^2 = 2n^2$

ovviamente $2n^2$ è pari, allora che m^2 sarà pari., allora *m* sarà pari, infatti il quadrato di numero pari è sempre pari, mentre il quadrato di numero dispari è sempre dispari. Ma se *m* è pari allora è possibile scriverlo nella forma ***m = 2k.***
Sostituendo sopra abbiamo quindi $2n^2 = (2k)^2$ sviluppando il quadrato e semplificando diventa $n^2 = 2k^2$ come stabilito prima, *2k* è senz'altro un numero pari. Ma allora anche ***n*** è pari. Abbiamo allora stabilito che ***n*** e ***m=(2k)*** sono pari. Ma ciò è assurdo. Infatti inizialmente abbiamo supposto ($\sqrt{2} = \frac{m}{n}$) con ($\frac{m}{n}$) irriducibile, ma non è possibile che una frazione irriducibile abbia sia il

denominatore che il numeratore pari. Dobbiamo quindi concludere che supporre che il numero $\sqrt{2}$ si possa esprimere con una frazione è assurdo, quindi $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, allora $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Si possono pensare i seguente 4 casi:

1. *m* e *n* entrambi **PARI**. Non è possibile perché per ipotesi la frazione $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini.
2. *m* e *n* entrambi **DISPARI**. Non è possibile perché se *m* è dispari allora lo è anche $\boldsymbol{m^2}$ (per esempio ***m = 3***) e lo stesso vale per ***n* e $\boldsymbol{n^2}$**; quindi $\boldsymbol{2n^2}$ sarebbe **PARI.** $\Rightarrow \quad m^2 \neq 2n^2$
3. *m* DISPARI e *n* PARI. Non è possibile perché se ***m*** è dispari allora lo è anche $\boldsymbol{m^2}$, mentre $\boldsymbol{n^2}$ è pari e "ancor di più" $\boldsymbol{2n^2}$**.** $\Rightarrow \quad m^2 \neq 2n^2$
4. ***m* PARI e *n* DISPARI**. Non è possibile perché *m* è pari e quindi è divisibile almeno per **2** e il suo quadrato, $\boldsymbol{m^2}$, sarebbe divisibile almeno per **4**; mentre $\boldsymbol{n^2}$ è dispari e quindi $\boldsymbol{2n^2}$ sarebbe divisibile solo per **2.** $\Rightarrow \quad m^2 \neq 2n^2$

quindi tutte le frazioni non bastano per esprimere tutte le grandezza. Esistono quindi altri numeri, dei "nuovi" numeri che non sono razionali: i numeri **IRRAZIONALI**. Essi non possono essere scritti sotto forma di decimali, neanche periodici (perché i periodici sono esprimibili sotto forma di frazione). Se si cerca di scriverli si ottiene un numero che continua all'infinito senza una struttura regolare. Quindi l'**UNICO** modo di esprimere la misura **ESATTA** del lato del quadrato con area doppia rispetto al quadrato con lato unitario è $\sqrt{2}$, ogni altro tentativo di scriverlo in forma decimale può essere solo un'approssimazione.

Considerazioni

L'idea di numero irrazionale è, certo, difficile; ma oggi anche chi non l'ha mai bene afferrata fa tranquillamente i suoi calcoli con la radice quadrata di 2 o la radice cubica di 3, o con il numero di Archimede π ("pi greca") che è irrazionale, di una razza assai peggiore della onesta radice quadrata di 2 8è niente di meno che un numero irrazionale trascendente). Noi siamo abituati cioè a considerare la radice quadrata di 2 un numero come tutti gli altri, così come siamo abituati all'idea che la Terra gira intorno al Sole anche se poi non siamo ben capaci di spiegare perché le cose vanno in modo tanto contrario a quello che dicono gli occhi. Gli scienziati greci invece (e non per ignoranza, anzi direi per profondità di pensiero) si rifiutavano di considerare il rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato un numero come tutti gli altri.
Per fare dell'algebra, per trattare come numeri anche questi "non numeri" occorreva quindi un grande e profondo sforzo mentale: occorreva una nuova idea di numero, più vasta, e non solo la introduzione di nuovi simboli.
Il lavoro qui presentato ha voluto rendere testimonianza di questo lungo e difficile cammino verso la definizione di numero irrazionale.

classe 3^DL I.T.S.T. "Artemisia Gentileschi"

BIBLIOGRAFIA

- Carl B. Boyer – *STORIA DELLA MATEMATICA* – traduzione di Adriano Cargo, Arnoldo Mondatori editore 2007;
- Giovanni Prodi, Nadia Tani – *SCOPRIRE LA MATEMATICA Introduzione all’algebra -* Ghisetti & Corvi Editori 2003;
- Lucio Lombardo radice – LA MATEMATICA DA PITAGORA A NEWTON - Franco Muzzio Editore 2007