Istituto Tecnico Statale per il Turismo
artemisia gentileschi

Progressioni geometriche nel Medioevo

Introduzione

Nell'Alto Medioevo la matematica si sviluppò in India con l'utilizzo dei numeri negativi, il calcolo degli irrazionali e l'introduzione della scrittura posizionale.
Il mondo occidentale venne in contatto con la matematica greca e indiana tramite gli Arabi.
Intorno all'800 d.C. operò nella "Casa della saggezza" di Baghdad il matematico persiano conosciuto come al-Khuwarizmi, padre dell'algebra. Egli scrisse un trattato dedicato al calcolo algebrico e alla risoluzione delle equazioni.
In questo periodo **Alcuino di York** (735-804) dette una nuova vitalità all'istruzione in Europa per ordine di Carlo Magno con l'obiettivo principale di formare funzionari atti ad amministrare l'impero di Carlo Magno.
Egli scrisse le "Propositiones ad acuendos iuvenes" che contiene problemi divertenti di "matematica ricreativa" proprio per attirare i giovani allo studio della matematica.
A partire dal XII secolo con la ripresa dei traffici e dei commerci, una base matematica diventava il supporto necessario alle sempre più numerose professioni che si andavano configurando. Abilità contabili erano richieste non solo agli addetti al commercio ma agli artigiani, ai bottegai, agli architetti, agli artisti in Europa.
Agli inizi del XIII secolo nacquero le scuole d'abaco il cui capostipite fu **Leonardo Pisano**, detto **Fibonacci**,che fece diffondere in Occidente le cifro indo-arabe e il sistema di numerazione posizionale e le relative operazioni, in quanto viaggiò
molto per il lavoro del padre e diventò sin da fanciullo scolaro degli arabi.
Il suo *Liber Abaci* (1202) è una summa del sapere aritmetico e algebrico del mondo arabo.
L'insegnamento della matematica è per problemi e l'apprendimento è di tipo catechistico, basato su comportamenti da imitare. L'insegnamento è basato su delle regole ("Fa così") senza spiegazioni.
All'epoca i calcoli erano eseguiti con l'abaco greco-romano, quindi semplici per l e addizioni e sottrazioni ma più complicato per le moltiplicazioni.

Problemi

I problemi scelti sembrano a noi oggi banali in quanto sappiamo calcolare la somma di una progressione geometrica ma all'epoca erano considerati molto difficili a causa della grandezza dei numeri.
Sono simili al problema 79 del papiro Rhind in cui si chiedeva la somma di oggetti diversi (case, gatti, topi)
I primi due problemi compaiono nel *Liber Abaci* di Fibonacci, capitolo XII, parte nona, l'altro nel " *Propositiones ad acuendos juvenes*" di Alcuino di York .

Potenze di due nella scacchiera:

Quanto vale la somma della successione delle potenze di 2 (partendo da 2^0 a 2^{63}) scritte nelle 64 caselle di una scacchiera quadrata 8x8?

Calcolò il numero che si ottiene duplicando ogni volta quello della casella precedente fino alla fine della scacchiera (2^{64}), e la somma di tutti questi numeri.

1	2	4	8	16	32	64	128

Numeri nella prima riga della scacchiera

1	3	7	15	31	63	127	255

Somma dei numeri nella prima riga della scacchiera

Fibonacci non menziona la leggenda della scacchiera e dell'imperatore Sessa che voleva una ricompensa in chicchi di grano. Persino Dante nel canto XXVIII del Paradiso ricorda la leggenda. ("L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla". 93 PAR)
Fibonacci risolse il problema cominciando a calcolare la somma dei primi otto numeri che formano la prima riga della scacchiera:255. Si accorse che la somma dei primi 8 numeri è uguale al numero che compare nella IX casella della scacchiera diminuito di 1.

Moltiplicando 256 per se stesso, si ottiene 65536 che supera di 1 la somma dei numeri delle prime 2 righe, e moltiplicando 65536 per sé si ottiene un numero che deve essere moltiplicato di nuovo per sé. Il risultato è 18.446.774.073.709.551.616 che supera di 1 la somma di tutti i numeri della scacchiera.
Per capire quanto grande fosse questo numero introdusse le città, case, scrigni e bisanti(monete d'oro imperiali).
Supponendo che ogni città possa contenere 65 536 case, che ogni casa 65 536 scrigni, che ogni scrigno 65 536 bisanti, serviranno ben 65 536 città per contenere questi bisanti.
Noi in classe abbiamo risolto il problema con i chicchi di riso, utilizzando le potenze di 2.

N casella	**Potenza di 2**	**valore**	**somma**
1	2^0	1	1
2	2^1	2	3
3	2^2	4	7
4	2^3	8	15

Abbiamo dovuto cercare delle regolarità nella tabella, qualcuno ha osservato che il valore della terza colonna è uguale al doppio del valore della seconda colonna diminuito di 1, altri hanno osservato che tale valore è uguale al doppio del numero della riga precedente aumentato di 1, infine un altro gruppo ha notato che il valore della terza colonna è dato dal numero che compare nella riga successiva della seconda colonna diminuito di 1.
Dovremmo utilizzare 2^{64}-1 chicchi di riso. Sapendo che in media 16 chicchi di riso hanno massa 1g, sicuramente un Kg di riso non basterà, ma neanche la produzione mondiale annua di riso (11 milioni di quintali) e per trasportarli saranno necessari 288.230.376.152 autocarri,che trasportano ognuno 80 sacchi da 50 kg
Se anziché raddoppiare il n. di chicchi di riso, avessimo triplicato il n. di chicchi di riso, avremmo ottenuto $S_{64} = \frac{3^{64}-1}{3-1}$ chicchi.
La relazione completa è pubblicata sul sito della scuola. http://www.gentileschi.it/olimpiadi/RELAZIONE%20SUI%20CHICCHI%20DI%20RISO3.pdf

Sette anziani verso Roma

Sette anziani vanno a Roma.
Ognuno ha 7 muli.
Ogni mulo ha 7 sacchi.
Ogni sacco ha 7 pani.
Ogni pane ha 7 coltelli.
Ogni coltello ha 7 fodere.
Tra persone, animali e oggetti, quante sono le cose che vanno a Roma?

Fibonacci ha sommato oggetti di natura diversa (7 anziani, 49 muli, 343 sacchi, 2401 pani, 16807 coltelli e 117649 fodere per un totale di 137256 cose).

137256
7
49
343
2401
16807
117649

Si nota che per fare le addizioni in colonna la somma viene messa al di sopra degli addendi.

Un re e il suo esercito

Un re ordinò ad un suo servo di reclutare un esercito da 30 castelli in modo che da ogni castello prendesse tanti uomini quanti ne aveva condotti. Lo stesso venne al primo castello da solo, al secondo con un altro già al terzo vennero in 4. Dica, chi può, quanti uomini furono raccolti da questi 30 castelli.

Alcuino di York risolse il problema raddoppiando ogni volta il numero degli uomini.

N° tappa	N° uomini	N° tappa	N° uomini
1	2	**16**	65536
2	4	**17**	131072
3	8	**18**	263144
4	16	**19**	524288
5	32	**20**	1048576
6	64	**21**	2097152
7	128	**22**	4194304
8	256	**23**	8388608
9	512	**24**	16777216
10	1024	**25**	33554432
11	2048	**26**	67108864
12	4096	**27**	134217728
13	8192	**28**	268435456
14	16384	**29**	536870912
15	32768	**30**	1073741824

Considerazioni

Questi problemi, semplici per noi, vennero risolti con le addizioni e moltiplicazioni .

La *moltiplicazione a crocetta semplice*, venne introdotta da Fibonacci nel Liber Abaci, è usata per calcolare il prodotto di fattori di due cifre ciascuno

Ad esempio 37x49=
Moltiplico unità per unità 7x9=63. Scrivo 3 unità e riporto 6 decine. Moltiplico unità per decine:7x4=28 (decine), e decine per unità 3x9=27 (decine) , calcolo 28+27+6=61 . Scrivo 1 decina e riporto 6 centinaia. Infine decine per decine 3x4=12, cui aggiungo 6 di riporto . Totale 18 che scrivo. Il prodotto risulta 1813 .
Tale metodo presuppone un'esecuzione del tipo:
$37 \times 49=(7+30)\times(9+40) = 7\times9 + 7\times40 + 30\times9+ 30 \times 40 = 63 + 280 + 270 + 1200 = 1813$
quindi la tecnica è un'applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

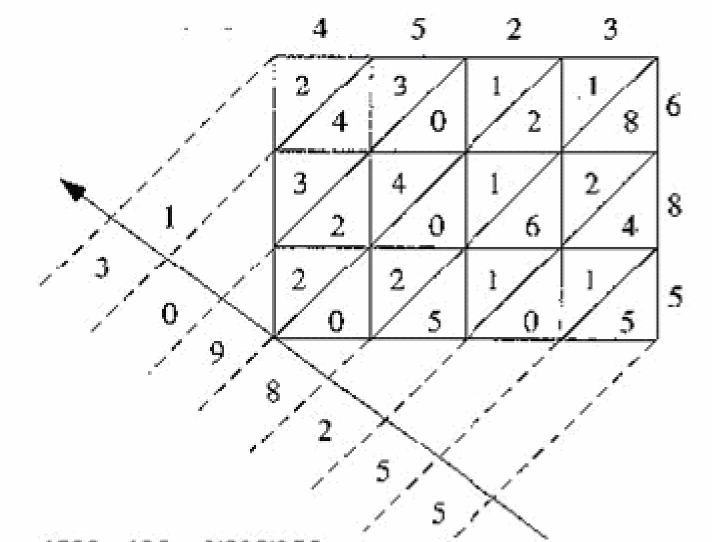
3 7

4 9

3x4+6 7x4+3x9+6 7x9
18 61 63

1 8 1 3

Qualora i numeri fossero con più di due cifre si utilizza la *moltiplicazione fulminea* in cui c'è lo spazio per scrivere i riporti dei prodotti parziali per evitare errori.
Si moltiplica la prima cifra del numero successivamente per le varie cifre del secondo numero partendo dall'unità scrivendo il risultato nel quadrato, si procede analogamente anche con le altre cifre del primo numero. Infine si eseguono le somme diagonalmente tenendo conto dei riporti.



4523 · 685 = 3'098'255

Oggi noi sappiamo che per calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q>1 in cui il primo termine sia 1 si applica la formula $S_n = \frac{q^n - 1}{q-1}$, qualora la progressione non iniziasse da 1

$$S_n = q\frac{q^n - 1}{q-1}$$

Per calcolare la somma dei primi 6 termini di una progressione geometrica, in cui il primo termine sia 7 e la ragione 7 si utilizza la seguente formula

$$S_6 = 7 \times \frac{7^6 - 1}{7 - 1} = 137256$$

Infatti sia

$$S_6 = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$$

Dividendo entrambi i membri per 7

$$\frac{1}{7} S_6 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$$

Sottraendo membro a membro e semplificando i termini opposti si ottiene

$$S_6 - \frac{1}{7} S_6 = 7^6 - 1 \quad \text{da cui } S_6 = 7 \times \frac{7^6 - 1}{7 - 1}$$

Lavoro svolto dalle alunne Guido Giulia, Meucci Erica, Ocri Irene, Zanzi Elettra coordinate dalla prof.ssa Giorgetti Francesca